

COSTO DI UN ALGORITMO

ESEMPIO DI COSTO PER ISTRUZIONI SEMPLICI

Le seguenti istruzioni semplici hanno tutte costo pari a 1.

- ▷ LEGGI(N) costo pari a 1
- ▷ SCRIVI("Inserisci un numero") costo pari a 1
- ▷ $I \leftarrow I + 1$ costo pari a 1

ESEMPIO DI COSTO PER COSTRUTTO ITERATIVO

Consideriamo il corpo dell'algoritmo Alg1 che calcola la somma dei primi N numeri naturali.

- ▷ INIZIO // Algoritmo Alg1
- ▷ SCRIVI("Inserisci un numero")
- ▷ LEGGI(N)
- ▷ $I \leftarrow 1$
- ▷ $Som \leftarrow 0$
- ▷ MENTRE ($I \leq N$) ESEGUI
- ▷ $Som \leftarrow Som + I$
- ▷ $I \leftarrow I + 1$
- ▷ FINEMENTRE
- ▷ SCRIVI("La somma dei primi ", N , " numeri è ", Som)
- ▷ FINE

Se $N=10$, il costo del solo ciclo è pari a 31, valore ottenuto da $(3 * 10) + 1$. Infatti il ciclo è costituito da un test che ha costo uguale a 1 e da un corpo composto da 2 istruzioni semplici (non consideriamo l'istruzione FINEMENTRE), anch'esse di costo unitario: il costo dell'intero ciclo è, pertanto, uguale a 3. Considerato che il ciclo deve essere eseguito dieci volte, il costo totale è dato da $3 * 10 = 30$. Ma non abbiamo ancora finito!

Quando il ciclo viene eseguito per la decima volta, la variabile I viene incrementata di un'unità assumendo, così, il valore 11. La condizione di ciclo viene eseguita un'undicesima volta in modo da poter verificare la falsità della condizione e, quindi, consentirne l'uscita. Tale esecuzione comporta l'aggiunta di un'ulteriore unità portando, così, il valore a 31. Il costo complessivo dell'intero algoritmo (costo del ciclo + costo delle altre istruzioni) è infine $31 + 5 = 36$, includendo anche le 4 istruzioni prima del ciclo e l'istruzione di scrittura finale. Generalizzando, quindi, per N qualsiasi il costo è: $(3 * N) + 1 + 5 = 3N + 6$.

ESEMPIO DI COSTO PER COSTRUTTO DI SELEZIONE

- ▷ SE ($Y > 0$)
- ▷ ALLORA
- ▷ $R \leftarrow 1$
- ▷ $Z \leftarrow 2$
- ▷ FINESE

Il costo del costrutto SE...ALLORA precedente è pari a 3: 1 per il test della condizione + 2 per le istruzioni contenute nel ramo ALLORA.

```

▷ SE (Y>0)
▷   ALLORA
▷     R ← 1
▷   ALTRIMENTI
▷     Z ← 2
▷     P ← 0
▷     R ← 2
▷ FINESE

```

Il costo del costrutto SE...ALLORA...ALTRIMENTI precedente è pari a 4: 1 per il test della condizione, 3 per le istruzioni del ramo ALTRIMENTI (si sceglie il ramo ALTRIMENTI poiché le istruzioni in esso contenute sono in numero maggiore rispetto a quelle del ramo ALLORA).

ESEMPIO DI COSTO PER CHIAMATA DI UN SOTTOPROGRAMMA

▶ Riprendiamo l'esempio dell'algoritmo Alg1 e modifichiamolo:

```

▷ INIZIO // ALGORITMO Alg1Bis
▷   SCRIVI("Inserisci un numero") // (1)
▷   LEGGI(N) // (2)
▷   I ← 1 // (3)
▷   Som ← 0 // (4)
▷   MENTRE (I ≤ N) ESEGUI // (5)
▷     Som ← Somma(I,Som) // (6)
▷     I ← I + 1 // (7)
▷   FINEMENTRE
▷   SCRIVI("La somma dei primi ", N, " numeri è ", Som) // (8)
▷ FINE

```

```

▷ FUNZIONE Somma (X:INTERO,
▷   Y:INTERO): INTERO
▷ VARIABILI
▷   S: INTERO
▷ INIZIO
▷   S ← X + Y
▷   RITORNO(S)
▷ FINE

```

Per N = 10 abbiamo:

$$\begin{aligned}
 \text{Costo di Alg1Bis} &= 5 + \text{CostoCostruttoMENTRE} = \\
 &= 5 + (3 + \text{CostoChiamata} + \text{CostoFunzioneSomma}) * 10 + 1 = \\
 &= 5 + (3 + 1 + 2) * 10 + 1 = \\
 &= 66
 \end{aligned}$$

Per N qualsiasi abbiamo:

$$\begin{aligned}
 \text{Costo di Alg1Bis} &= 5 + \text{CostoCostruttoMENTRE} = \\
 &= 5 + (3 + \text{CostoChiamata} + \text{CostoFunzioneSomma}) * N + 1 = \\
 &= 5 + (3 + 1 + 2) * N + 1 = \\
 &= 6N + 6
 \end{aligned}$$

dove:

5 è il costo delle istruzioni (1), (2), (3), (4) e (8)
 3 è il costo delle istruzioni (5), (6) e (7)
 2 è il costo delle istruzioni della funzione Somma()



ESEMPIO DI COSTO PER ISTRUZIONE COMPOSTA

```

▷ SE (X>0)
▷   ALLORA
▷     SE (Y>0)
▷       ALLORA
▷         R ← 1
▷       ALTRIMENTI
▷         R ← 2
▷         T ← 1
▷     FINESE
▷   Z ← 3
▷ FINESE

```

$$\begin{aligned}
 \text{Costo istruzione composta} &= \text{CostoTestSEesterno} + \text{CostoRamoALLORASEEsterno} = \\
 &= 1 + \text{CostoSEInterno} + \text{CostoIstruzioneSemplice} = \\
 &= 1 + (1 + 2) + 1 = 5
 \end{aligned}$$

COSTO DI UN ALGORITMO

COSTO PER COSTRUTTO ITERATIVO MENTRE... ESEGUI

```

▶ ALGORITMO A1
▶ VARIABILI
▶ I,N:INTERO
▶ INIZIO
▶ I ← 0
▶ MENTRE (I<N) ESEGUI
▶   I ← I+1
▶ FINEMENTRE
▶ FINE
    
```

Il ciclo MENTRE si compone di un test ($I < N$) e di un corpo costituito da una operazione di assegnazione ($I \leftarrow I + 1$). Per ogni test positivo si esegue un'assegnazione, quindi i costi sono:

- assegnazione esterna al ciclo: 1;
- numero di test del ciclo: $N+1$ (compreso il test finale);
- assegnazioni interne al ciclo: $1*N$.

$$\text{Costo di A1} = \text{CostoAssegnazioneEsterna} + \text{CostoCostruttoMENTRE} = 1 + ((1+1)*N+1) = 1 + 2*N + 1 = 2+2*N$$

COSTO PER COSTRUTTO ITERATIVO RIPETI... FINCHÉ

```

▶ ALGORITMO A2
▶ VARIABILI
▶ I,J,N:INTERO
▶ INIZIO
▶ I ← 0
▶ RIPETI
▶   I ← I+1
▶   J ← J*3+42
▶ FINCHÉ (I ≥ N)
▶ FINE
    
```

Il corpo del ciclo si compone di due passi base. I costi sono:

- assegnazione esterna al ciclo: 1;
- numero di test: N ;
- assegnazioni interne: $2*N$.

$$\text{Costo di A2} = \text{CostoAssegnazioneEsterna} + \text{CostoCostruttoMENTRE} = 1 + ((1+2)*N) = 1 + 3*N = 1+3*N$$

COSTO PER COSTRUTTO ITERATIVO PER...: CALCOLO DEI PRIMI N NUMERI PARI

```

▶ FUNZIONE SommalPrimiNumPari(N: INTERO): INTERO
▶ VARIABILI
▶ M, I, P:INTERO
▶ INIZIO
▶ M ← 0
▶ PER I ← 1 A N ESEGUI
▶   P ← 2 * I
▶   M ← M+ P
▶ FINEPER
▶ RITORNO(M)
▶ FINE
    
```

Per la funzione SommalPrimiNumPari individuiamo i seguenti costi:

- assegnazione esterna al ciclo: 1;
- assegnazione iniziale ciclo PER: 1;
- numero di test del ciclo PER: $N + 1$;
- incrementi del ciclo PER: N ;
- corpo del ciclo PER: $2*N$;
- istruzione RITORNO: 1.

$$\text{Costo di SommalPrimiNumPari} = \text{CostoAssegnazioneEsterna} + \text{CostoCicloPER} = 1 + (1 + N + 1 + 2*N + N) + \text{CostoRITORNO} = 1 + (2 + 4N) + 1 = 4*N + 4$$

COSTO PER COSTRUTTO ITERATIVO MENTRE... ESEGUI

```

> ALGORITMO A3
> VARIABILI
> I,J,N:INTERO
> INIZIO
> I ← 0
> MENTRE (I<2*N) ESEGUI
>   I ← I+1
>   J ← J*3+4367
> FINE
  
```

Il test del ciclo MENTRE viene eseguito $2*N+1$ volte (compreso il test finale) e il corpo è costituito da due istruzioni. Pertanto i costi sono:

- assegnazione esterna al ciclo: 1;
- numero di test: $2*N+1$ (compreso il test finale);
- assegnazioni interne: $2*(2*N)$.

$$\text{Costo di A3} = \text{CostoAssegnazioneEsterna} + \text{CostoCostruttoMENTRE} =$$

$$= 1 + ((1+2)*(2*N)+1) = 1 + 3*2*N + 1 = 2+6*N$$

COSTO PER COSTRUTTI ITERATIVI ANNIDATI

```

> ALGORITMO A4
> VARIABILI
> I,J,N:INTERO
> INIZIO
> I ← 0
> MENTRE (I<N) ESEGUI
>   PER J ← 0 A N ESEGUI
>     SCRIVI("CIAO!")
>   FINEPER
>   I ← I+1
> FINE
  
```

Abbiamo un ciclo PER per ogni ciclo MENTRE, una istruzione di output per ogni ciclo PER e una assegnazione per ogni ciclo MENTRE. Pertanto, i costi sono:

- assegnazione esterna: 1 +
- test MENTRE: $N+1$ +
- ciclo MENTRE: $N*$
- assegnazione iniziale ciclo PER: 1 +
- controlli ciclo PER: $N+1$ +
- incrementi ciclo PER: N +
- corpo ciclo PER: N +
- assegnazione ciclo MENTRE: 1)

$$\text{Costo di A4} = \text{costo inizializzazione esterna al ciclo} + \text{CostoCostruttoMENTRE} =$$

$$= 1 + ((\text{CostoCostruttoPER} + 1)*N + 1) = 2 + (\text{CostoCostruttoPER})*N + N =$$

$$= 2 + (1 + N + 1 + N + N + 1)*N + 1)*N + N =$$

$$= 2 + 3N + 3*N^2 + N = 2+4*N+3*N^2$$

COSTO PER COSTRUTTI ITERATIVI ANNIDATI

```

> FUNZIONE Funz(N,M: INTERO): INTERO
> VARIABILI
> X,Y,I:INTERO
> INIZIO
> X ← 0
> PER I ← 1 A N ESEGUI
>   PER J ← 1 A M ESEGUI
>     X ← X+1
>     Y ← X
>   FINEPER
> FINEPER
> RITORNO (X)
> FINE
  
```

Abbiamo un ciclo PER esterno e un ciclo PER interno, due istruzioni per ogni ciclo PER interno e una istruzione RITORNO. Pertanto, i costi sono:

- assegnazione esterna: 1 +
- assegnazione iniziale PER esterno: 1 +
- test PER esterno: $N+1$ +
- corpo ciclo PER esterno: $N*$
 - assegnazione iniziale ciclo PER interno: 1 +
 - controlli ciclo PER interno: $M+1$ +
 - incremento ciclo PER interno: M +
 - corpo ciclo PER interno: $2M$ +
- incremento ciclo PER esterno: N
- istruzione RITORNO: 1

$$\text{Costo di Funz} = 1 + (\text{CostoCostruttoPEREsterno}) + 1 =$$

$$= 2 + (1 + N + 1 + N + N*\text{CostoCostruttoPERInterno}) =$$

$$= 4 + 2N + N*(1 + M + 1 + M + 2M) = 4 + 4N + 4N*M$$