

c) Dopo avere costruito la relativa tavola di verità, calcolare il valore di verità dei seguenti enunciati composti utilizzando gli enunciati semplici sottoindicati valutati secondo i valori assegnati

- c1)** $p \text{ AND } q$ con $p : (a > 5)$ $q : (b \neq -2)$
con $a = 5$ e $b = 2$
- c2)** $\text{NOT} ((\text{NOT } p) \text{ OR } q)$ con $p : (a \leq 3)$ $q : (b = 4)$
con $a = 3$ e $b = -4$
- c3)** $(p \text{ NAND } (\text{NOT } q)) \text{ XOR } r$ con $p : (a < 7)$ $q : (b \geq 2)$ $r : (c \neq -4)$
con $a = 7$ e $b = 3$ e $c = -4$
- c4)** $\text{NOT} (p \text{ AND } q) \text{ OR } (\text{NOT } p)$ con $p : (x \leq 3)$ $q : (y \neq 4)$
con $x = 3$ e $y = 4$
- c5)** $\text{NOT} (p \text{ OR } q) \text{ AND } p$ con $p : (x > 3)$ $q : (y = 4)$
con $x = -3$ e $y = -4$
- c6)** $(p \text{ NAND } (\text{NOT } q)) \text{ XOR } (\text{NOT } r)$ con $p : (x \leq 3)$ $q : (y \neq 4)$ $r : (z > 2)$
con $x = 0$ e $y = 8$ e $z = -1$
- c7)** $\text{NOT}(p \text{ NOR } (\text{NOT } r)) \text{ AND } ((\text{NOT } q) \text{ OR } p)$
con $p : (a = 7)$ $q : (b < 1)$ $r : (c \geq -6)$
con $a = 7$ e $b = 3$ e $c = -5$
- c8)** $(\text{NOT } p) \text{ XNOR } \text{NOT} (q \text{ NAND } (\text{NOT } r))$
con $p : (a \leq 2)$ $q : (b \geq 0)$ $r : (c \neq -3)$
con $a = -1$ e $b = 0$ e $c = -3$

d) Utilizzando tutte le proprietà illustrate a lezione (comprese le leggi di DE MORGAN) semplificare, ove possibile, i seguenti enunciati composti

- d1)** $\text{NOT} ((\text{NOT } p) \text{ OR } q)$ con $p : (a \leq 3)$ $q : (b = 4)$
- d2)** $\text{NOT} (p \text{ AND } (\text{NOT } q))$ con $p : (a > 5)$ $q : (b \neq 8)$
- d3)** $\text{NOT} (\text{NOT}(p \text{ AND } q) \text{ OR } r)$ con $p : (a < 2)$ $q : (b \geq -4)$ $r : (c \neq 3)$
- d4)** $\text{NOT} ((\text{NOT } p) \text{ OR } q \text{ OR } (\text{NOT } r)) \text{ AND } \text{NOT} (p \text{ NAND } q)$
con $p : (a > -3)$ $q : (b \leq 7)$ $r : (c \neq 4)$
- d5)** $\text{NOT} (p \text{ AND } (\text{NOT } q) \text{ AND } r) \text{ OR } \text{NOT} (p \text{ NOR } q)$
con $p : (a \leq 5)$ $q : (b > 11)$ $r : (c \leq 2)$

Suggerimenti per lo SVOLGIMENTO

Negli esercizi della tipologia a) , b) e c) per costruire una tabella di verità si deve seguire il seguente procedimento:

1) Individuare tutti gli enunciati semplici distinti presenti nell'enunciato composto (o forma enunciativa) assegnato;

*(nota bene: gli enunciati semplici presenti in un generico enunciato composto sono indicati, in genere, da una lettera minuscola partendo dalla **p** e continuando rispettando la classica sequenza alfabetica (quindi verrà usata poi la **q**, poi la **r**, poi la **s** e così via);*

2) La tabella di verità che dovrà essere disegnata deve avere una colonna per ciascun enunciato semplice presente nell'enunciato composto assegnato;

3) La tabella di verità che dovrà essere disegnata deve avere tante righe quante esprime dal calcolo della seguente potenza

$$2^n$$

dove:

- la base **2** sta ad indicare il numero di valori di verità possibili che possono essere assunti da ciascun enunciato semplice presente nell'enunciato composto (VERO o FALSO);
- l'esponente **n** sta ad indicare il numero di enunciati semplici distinti presenti nell'enunciato composto assegnato.

(Esempio: se nell'enunciato composto del quale devo dicegnare la tavola di verità:

- *è presente un solo enunciato semplice (**p**) allora la tabella avrà **2¹** ossia **2 righe**;*
- *sono presenti due soli enunciati semplici (**p** e **q**) allora la tabella avrà **2²** ossia **4 righe**;*
- *sono presenti tre soli enunciati semplici (**p**, **q** ed **r**) allora la tabella avrà **2³** ossia **8 righe**;*
- *etc. etc.)*

4) Per inserire agevolmente nelle colonne della tabella di verità relative agli enunciati semplici individuati nell'enunciato composto, **TUTTE** le combinazioni di valori di verità possibili occorre seguire il seguente procedimento:

- partendo dalla colonna più a destra disegnata (ossia quella che alfabeticamente viene per ultima) inserire in modo alternato V, F, V, F,
- continuare con la colonne più a sinistra inserire in modo alternato V, V, F, F,
- continuare con la colonne più a sinistra inserire in modo alternato V, V, V, V, F, F, F, F,

*Esempio: se nell'enunciato composto è presente un solo enunciato semplice **p***

p	Resto della tabella
V	
F	

*Esempio: se nell'enunciato composto sono presenti due soli enunciati semplici **p** e **q***

p	q	Resto della tabella
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Esempio: se nell'enunciato composto sono presenti tre soli enunciati semplici **p**, **q** ed **r**

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Resto della tabella

E così via.....

5) Inserire nella tabella di verità una colonna per ogni sottoenunciato “risolvibile” individuato all’interno dell’enunciato composto assegnato, rispettando la presenza di eventuali parentesi tonde;

(nota bene: tale sottoenunciato deve essere risolto utilizzando, alle colonne opportune, una qualsiasi delle tavole di verità relative ai connettivi logici fondamentali (AND, OR e NOT) o ai connettivi logici derivati (XOR, XNOR, NAND e NOR) dell’Algebra di Boole studiati a lezione.

L’ultima colonna conterrà il risultato dell’operazione.

Esempio svolto:

Supponiamo di voler conoscere costruire **la tavola verità** del seguente enunciato composto (o forma enunciativa)

$$\text{NOT}(p \text{ AND } (\text{NOT } q))$$

Come appena illustrato costruiamo la tavola di verità seguendo i seguenti passi:

1) individuiamo gli enunciati semplici contenuti nella forma enunciativa.

Nel nostro caso sono 2 esattamente **p** e **q**;

2) disegniamo una colonna per ciascun enunciato semplice presente

p	q
---	---

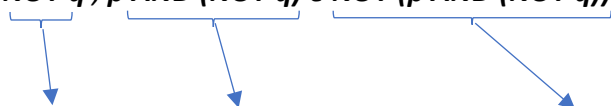
3) disegniamo tante righe quanto il valore di 2^2 ossia 4

p	q

4) valorizziamo opportunamente tali colonne così come suggerito in precedenza:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

5) Inserire nella tabella di verità una colonna per ogni sottoenunciato "risolvibile" individuato all'interno dell'enunciato composto assegnato, rispettando la presenza di eventuali parentesi tonde (Nel nostro caso $\text{NOT } q$, $p \text{ AND } (\text{NOT } q)$ e $\text{NOT}(p \text{ AND } (\text{NOT } q))$)



p	q	$\text{NOT } q$	$p \text{ AND } (\text{NOT } q)$	$\text{NOT}(p \text{ AND } (\text{NOT } q))$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Negli esercizi della tipologia b) per dimostrare alla fine se i due enunciati composti assegnati sono o non sono **LOGICAMENTE EQUIVALENTI**, dopo aver costruito le due rispettive tavole di verità, occorre confrontare l'ultima colonna della prima tavola di verità con l'ultima colonna della seconda tavola di verità (ossia le colonne contenenti i rispettivi risultati)
 Avremo allora i seguenti due possibili casi:
 - tali due colonne **COINCIDONO** (ossia contengono la medesima sequenza di valori di verità): in questo caso si dice che "i due enunciati composti assegnati risultano **LOGICAMENTE EQUIVALENTI** perché hanno la stessa tavola di verità";
 - tali due colonne **NON COINCIDONO** (ossia **NON** contengono la medesima sequenza di valori di verità): in questo caso si dice che "i due enunciati composti assegnati **NON** risultano **LOGICAMENTE EQUIVALENTI** perché **NON** hanno la stessa tavola di verità";

Esempio svolto:

Proviamo che i due enunciati composti (o forme enunciative)

$$(p \text{ AND } q) \text{ OR } (\text{NOT } p) \quad \text{e} \quad (\text{NOT } p) \text{ OR } q$$

sono **LOGICAMENTE EQUIVALENTI**.

Dobbiamo innanzitutto costruire le due tavole di verità con seguendo i passi prima specificati per poi confrontare i valori di verità contenuti nelle rispettive due ultime colonne.

Tavola di verità di: $(p \text{ AND } q) \text{ OR } (\text{NOT } p)$

p	q	$p \text{ AND } q$	$\text{NOT } p$	$(p \text{ AND } q) \text{ OR } (\text{NOT } p)$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Tavola di verità di: $(\text{NOT } p) \text{ OR } q$

p	q	$\text{NOT } p$	$(\text{NOT } p) \text{ OR } q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Poichè i due enunciati composti hanno la stessa tavola di verità essi risultano essere **LOGICAMENTE equivalenti**.

Quindi possiamo scrivere che $(p \text{ AND } q) \text{ OR } (\text{NOT } p) \equiv (\text{NOT } p) \text{ OR } q$

Negli esercizi della tipologia c), dopo aver costruito la tavola di verità relativa all'enunciato composto assegnato, occorre sostituire per ciascun enunciato semplice i valori proposti in modo da poter:

- calcolare il valore di verità di ciascun enunciato semplice partecipante;
- individuare, all'interno della tavola di verità, la riga corretta relativa alla combinazione di valori di verità individuati per tutti gli enunciati semplici partecipanti;
- comunicare il risultato finale ottenuto leggendolo dall'ultima colonna.

Esempio svolto:

Dopo avere costruito la relativa tavola di verità, calcolare il valore di verità del seguente enunciato composto

$$\text{NOT}(p \text{ AND } (\text{NOT } q))$$

utilizzando gli enunciati semplici sottoindicati valutati secondo i seguenti valori assegnati:

$$\begin{aligned} \text{con } p &: (a < -7) & q &: (b \neq -4) \\ \text{con } a &= -5 & \text{e } b &= -2 \end{aligned}$$

1) Per prima cosa calcoliamo il valore di verità di ciascun enunciato semplice utilizzando i valori assegnati:

con $p : (a < -7)$ ossia $(-5 < -7)$ FALSO (F) quindi **p FALSO**
 con $q : (b \neq -4)$ ossia $(-2 \neq -4)$ VERO (V) quindi **q VERO**

2) Ora costruiamo la tavola di verità dell'enunciato composto assegnato:

p	q	$\text{NOT } q$	$p \text{ AND } (\text{NOT } q)$	$\text{NOT}(p \text{ AND } (\text{NOT } q))$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

3) Individuiamo la riga della tavola di verità corrispondente alla combinazione individuato al punto 1 e mettiamo in evidenza la risposta da dare

p	q	$\text{NOT } q$	$p \text{ AND } (\text{NOT } q)$	$\text{NOT}(p \text{ AND } (\text{NOT } q))$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

4) Diamo la risposta: *nelle ipotesi fornite dall'esercizio assegnato l'enunciato composto assume valore di verità VERO (V)*

Negli esercizi di tipologia d) che prevedono l'utilizzo di tutte le proprietà illustrate a lezione (comprese le leggi di DE MORGAN) per semplificare un enunciato composto assegnato occorre operare come segue:

Esempio svolto: semplificare il seguente enunciato composto

NOT ((**NOT** p) **OR** q) con **p** : (a ≤ 3) **q** : (b = 4) ossia in teoria avremmo **NOT** ((**NOT** (a ≤ 3)) **OR** (b = 4))

Invece svolgendo quanto richiesto abbiamo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \text{Legge di} & & \text{Legge della} & & \text{Sostituzione} & & \text{Applicazione di} \\
 & \text{DE MORGAN} & & \text{doppia negazione} & & \text{enunciati assegnati} & & \text{principio algebrico} \\
 \text{NOT} ((\text{NOT } p) \text{ OR } q) & \equiv & \text{NOT}(\text{NOT } p) \text{ AND } (\text{NOT } q) & \equiv & p \text{ AND } (\text{NOT } q) & \equiv & (a \leq 3) \text{ AND } (\text{NOT } (b = 4)) & \equiv & (a \leq 3) \text{ AND } (b \neq 4)
 \end{array}$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$\text{NOT} ((\text{NOT } (a \leq 3)) \text{ OR } (b = 4)) \equiv (a \leq 3) \text{ AND } (b \neq 4)$$

Appare del tutto evidente la semplificazione ottenuta!