0. ALGEBRA DI BOOLE E SISTEMI DI NUMERAZIONE

ALGEBRA DI BOOLE

Nel lavoro di programmazione capita spesso di dovere ricorrere ai principi della logica degli enunciati ed occorre conoscere almeno alcuni concetti base dell'**algebra delle preposizioni** detta anche **algebra booleana** o di **Boole** dal matematico inglese George Boole (1815-1864).

Gli oggetti dell'algebra di Boole sono gli **enunciati.**

DEF: Si definisce **enunciato** una **proposizione** che può essere soltanto vera oppure falsa e non può mai essere né contemporaneamente entrambe le cose né indeterminata.
DEF: Con il termine **valore di verità di enunciato** si intende la sua verità oppure la sua falsità.

Gli enunciati possono essere **semplici** oppure **composti.**
DEF: Un. **enunciato composto** è formato da due o più sottoenunciati collegati tra loro attraverso appositi **connettivi logici.**
La **proprietà fondamentale** di un **enunciato composto** è che il suo valore di verità viene completamente definito dai valori di verità dei suoi sottoenunciati e dal connettivo logico che li unisce.

I CONNETTIVI LOGICI FONDAMENTALI

A) CONGIUNZIONE (AND oppure **e** oppure $\wedge$ oppure **et** oppure **&)**
Il connettivo logico **AND** è un operatore **binario** (ossia agisce su due enunciati per crearne un altro) completamente definito dalla seguente **tavola di verità**

p	q	p AND q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Quindi l'**enunciato composto p AND q** risulta **VERO** solo nel caso in cui entrambi gli **enunciati semplici p** e **q** sono **VERI** mentre risulta **FALSO** in tutti gli altri casi.

B) DISGIUNZIONE (OR oppure **o** oppure $\vee$ oppure **vel** oppure **|)**
Il connettivo logico **OR** è un operatore **binario** (ossia agisce su due enunciati per crearne un altro) completamente definito dalla seguente **tavola di verità**

p	q	p OR q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Quindi l'**enunciato composto p OR q** risulta **FALSO** solo nel caso in cui entrambi gli **enunciati semplici p** e **q** sono **FALSI** mentre risulta **VERO** in tutti gli altri casi (ossia quando almeno uno degli enunciati semplici è VERO).

C) NEGAZIONE (NOT oppure **non)**
Il connettivo logico **NOT** è un operatore **unario** (ossia agisce su un solo enunciato per crearne un altro) completamente definito dalla seguente **tavola di verità**

p	NOT p
V	F
F	V

Quindi l'**enunciato composto NOT p** (detto anche **"negazione di p")** che risulta **VERO** se l'**enunciato semplice p** è **FALSO** mentre risulta **FALSO** se l'**enunciato semplice p** è **VERO.**

I tre connettivi logici sopra definiti - **AND**, **OR** e **NOT** - costituiscono un insieme **"funzionalmente completo"** di operatori nell'algebra di Boole.
Tutti gli altri connettivi logici possibili sono chiamati **"connettivi derivati"** in quanto possono essere espressi mediante un'opportuna combinazione di uno o più dei connettivi funzionalmente completi (ossia **AND**, **OR** e **NOT**)

I CONNETTIVI LOGICI DERIVATI

Esempio di "connettivi derivati" sono **XOR**, **NAND**, **NOR** e **XNOR**

D) DISGIUNZIONE ESCLUSIVA (XOR oppure **o esclusivo** oppure **aut)**
Il connettivo logico X**OR** è un operatore **binario** (ossia agisce su due enunciati per crearne un altro) completamente definito dalla seguente **tavola di verità**

p	q	p XOR q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Quindi l'**enunciato composto p OR q** risulta **VERO** solo nel caso in cui **al più uno solo** dei due **enunciati semplici p** e **q** risulti **VERO** mentre risulta **FALSO** in tutti gli altri casi

oppure in altri termini

L'**enunciato composto p XOR q** risulta **VERO** solo nel caso in cui i due **enunciati semplici p** e **q** hanno **valori di verità diversi** mentre risulta **FALSO** se i due **enunciati semplici p** e **q** hanno **valori di verità uguali.**

N.B. Lo XOR è un connettivo derivato in quanto si potrà dimostrare utilizzando il concetto di equivalenza logica illustrato più avanti che

$$\textbf{p XOR q} \equiv \textbf{(p AND (NOTq)) OR ((NOTp) AND q)}$$

E) OPERATORE LOGICO NAND

Il connettivo logico **NAND** è un operatore **binario** (ossia agisce su due enunciati per crearne un altro) completamente definito dalla seguente **tavola di verità**

p	q	p NAND q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Quindi l'**enunciato composto p NAND q** risulta **FALSO** quando entrambi gli enunciati semplici **p** e **q** sono **VERI** mentre risulta **VERO** in tutti gli altri casi

N.B. Il NAND è un connettivo derivato in quanto si potrà dimostrare utilizzando il concetto di equivalenza logica illustrato più avanti che

$$\textbf{p NAND q} \equiv \textbf{NOT (p AND q)}$$

F) OPERATORE LOGICO NOR

Il connettivo logico **NOR** è un operatore **binario** (ossia agisce su due enunciati per crearne un altro) completamente definito dalla seguente **tavola di verità**

p	q	p NOR q
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Quindi l'**enunciato composto p NOR q** risulta **VERO** quando entrambi gli enunciati semplici **p** e **q** sono **FALSI** mentre risulta **FALSO** in tutti gli altri casi

N.B. Il NOR è un connettivo derivato in quanto si potrà dimostrare utilizzando il concetto di equivalenza logica illustrato più avanti che

$$\textbf{p NOR q} \equiv \textbf{NOT (p OR q)}$$

G) OPERATORE LOGICO XNOR

Il connettivo logico **XNOR** è un operatore **binario** (ossia agisce su due enunciati per crearne un altro) completamente definito dalla seguente **tavola di verità**

p	q	p XNOR q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Quindi l'**enunciato composto p XNOR q** risulta **VERO** solo nel caso in cui gli **enunciati semplici p** e **q** hanno lo stesso valore di verità mentre risulta **FALSO** in tutti gli altri casi

N.B. Lo XNOR è un connettivo derivato in quanto si potrà dimostrare utilizzando il concetto di equivalenza logica illustrato più avanti che

$$\textbf{p XNOR q} \equiv \textbf{NOT (p XOR q)}$$

LE TAVOLE DI VERITÀ

Combinando in vario modo gli enunciati semplici del tipo p, q, r ed i connettivi logici **AND**, **OR**, **NOT** e **XOR** si possono ottenere enunciati molto più complessi.
La **forma enunciativa** è un enunciato composto **P(p, q, r, ..)** da enunciati semplici variabili attraverso i connettivi logici

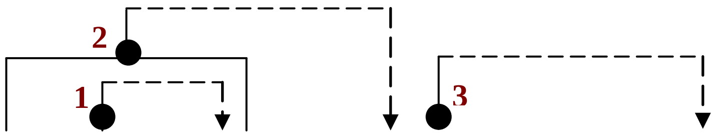
Il **valore di verità di una forma enunciativa** è noto quando si conoscono i valori di verità delle sue variabili. Un modo semplice per conoscerlo è quello che prevede la *costruzione delle tavole di verità.*

Esempio:
Supponiamo di voler conoscere i valori di verità della seguente forma enunciativa

NOT(p AND (NOT q))

Costruiamo la tavola di verità seguendo i seguenti passi:
*- prima occorre individuare gli enunciati semplici contenuti nella forma enunciativa. Nel nostro caso **p** e **q**;*
*- poi occorre individuare gli enunciati composti contenuti nella forma enunciativa <u>partendo dall'enunciato composto più interno</u> fino all'enunciato composto totale. Nel nostro caso **NOT q**, **(p AND (NOT q))** e **NOT(p AND (NOT q))**;*
- disegnare una tabella con tante colonne quanti sono gli elementi individuati nei primi due punti;
- applicare nell'ordine le tavole di verità dei connettivi logici fondamentali AND, OR, XOR e NOT.

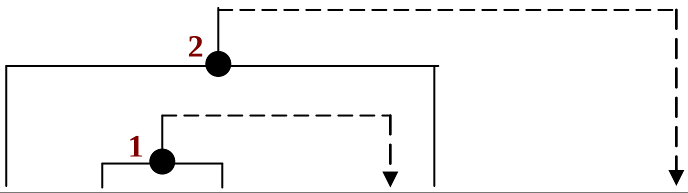
Legenda:
● *applicazione di una tavola di verità fondamentale (AND, OR, XOR o NOT)*
– – – – *risultato di una tavola di verità fondamentale (AND, OR, XOR o NOT)*



p	***q***	***NOT q***	***p AND (NOT q)***	***NOT(p AND (NOT q))***
V	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**V**

Esempio:
Supponiamo di voler conoscere i valori di verità della seguente forma enunciativa

p OR (q AND r))



p	***q***	***r***	***q AND r***	***p OR (q AND r))***
V	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**F**

L'EQUIVALENZA LOGICA

DEF: Due forme enunciative si dicono **logicamente equivalenti** se hanno la stessa tavola di verità.
L'equivalenza logica si indica con il simbolo $\equiv$

N.B. Le tavole di verità da mettere a confronto sono costituite solo dalle colonne relative agli enunciati semplici partecipanti più la sola colonna del risultato finale, escludendo eventualmente qualsiasi colonna intermedia utilizzata per svolgere i passaggi risolutivi.

Esempio:
Proviamo che le due forme enunciative

(p AND q) OR (NOT p) ***e*** ***(NOT p) OR q***

sono equivalenti.
Dobbiamo innanzitutto costruire le due tavole di verità con seguendo i passi prima specificati.

Tavola di verità di: ***(p AND q) OR (NOT p)***

p	*q*	*p AND q*	*NOT p*	*(p AND q) OR (NOT p)*
V	**V**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**V**

Tavola di verità di: ***(NOT p) OR q***

p	*q*	*NOT p*	*(NOT p) OR q*
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**

Poichè le due forme enunciative hanno la stessa tavola di verità esse risultano essere equivalenti.

Quindi possiamo scrivere che ***(p AND q) OR (NOT p)*** $\equiv$ ***(NOT p) OR q***

LEGGI O PROPRIETÀ DELL'ALGEBRA BOOLEANA

1) IDEMPOTENZA	**p OR p ≡ p** **p AND p ≡ p**
2) ASSOCIATIVITA'	**(p OR q) OR r ≡ p OR (q OR r)** **(p AND q) AND r ≡ p AND (q AND r)**
3) COMMUTATIVITA'	**p OR q ≡ q OR p** **p AND q ≡ q AND p**
4) DISTRIBUTIVITA'	**p OR (q AND r) ≡ (p OR q) AND (p OR r)** **p AND (q OR r) ≡ (p AND q) OR (p AND r)**
5) DOPPIA NEGAZIONE	**NOT (NOT p) ≡ p**
6) LEGGI DI DE MORGAN	**(1) NOT (p OR q) ≡ (NOT p) AND (NOT q)** **(2) NOT (p AND q) ≡ (NOT p) OR (NOT q)**
7) PRINCIPIO DI NON CONTRADDIZIONE	**p AND (NOT p) è sempre FALSO**

Nota Bene
Tutte queste proprietà si dimostrano costruendo le tavole di verità di entrambi i membri e verificando che esse coincidono