

Elementi di teoria degli insiemi utili per la definizione di "Relazione"

Diagram illustrating a table structure with annotations:

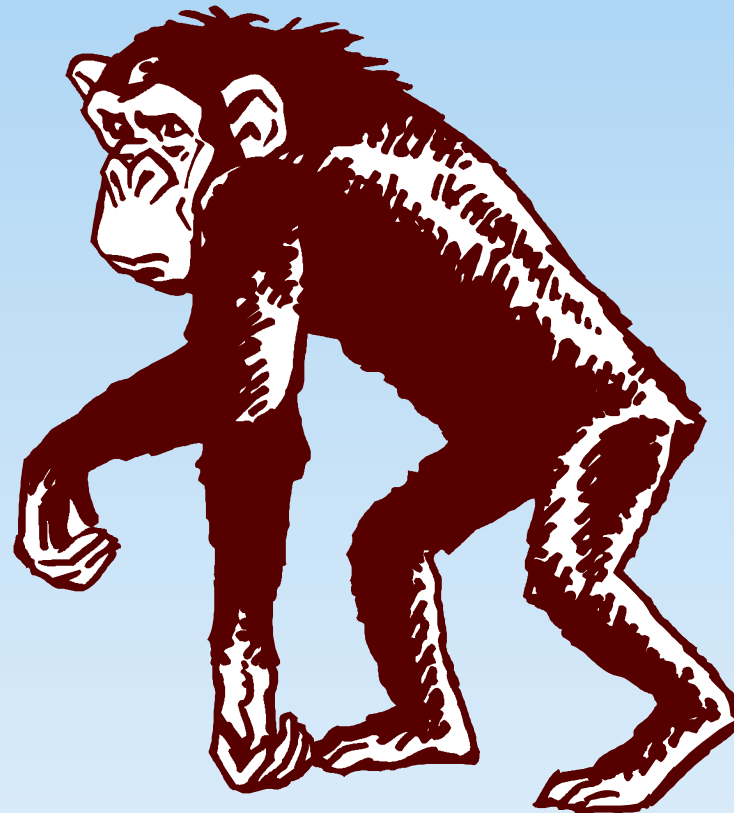
Id	Nome	Cognome	Classe
0	Marco	Rossi	5H
1	Luca	Verdi	5H
2	Gianni	Bianchi	5H
3	Alessio	Neri	5H
...			...

Annotations:

- CHIAVE PRIMARIA oppure Primary Key (PK)**: Points to the **Id** column.
- CAMPO oppure ATTRIBUTO**: Points to the **Nome**, **Cognome**, and **Classe** columns.
- RECORD oppure N-pla oppure ISTANZA**: Points to the rows of data.



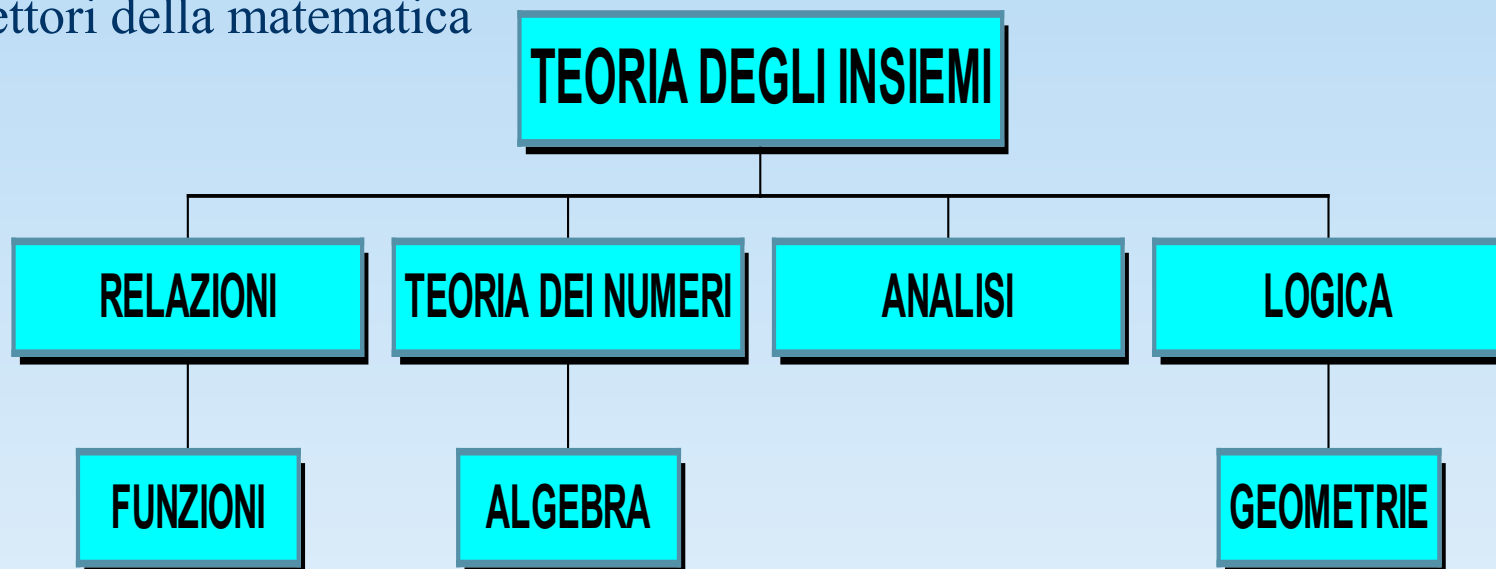
Il concetto di **insieme** e di **elemento** di un insieme sono **CONCETTI PRIMITIVI** proprio come i concetti matematici di punto, retta e piano introdotti nella geometria



Con il termine “**insieme**” in matematica si indica una collezione di elementi, più o meno come nel linguaggio comune

Si tratta di un concetto molto importante perché su di esso si fonda non solo tutto l’edificio della matematica ma anche la struttura di altre discipline tecnico-scientifiche (es. **INFORMATICA**)

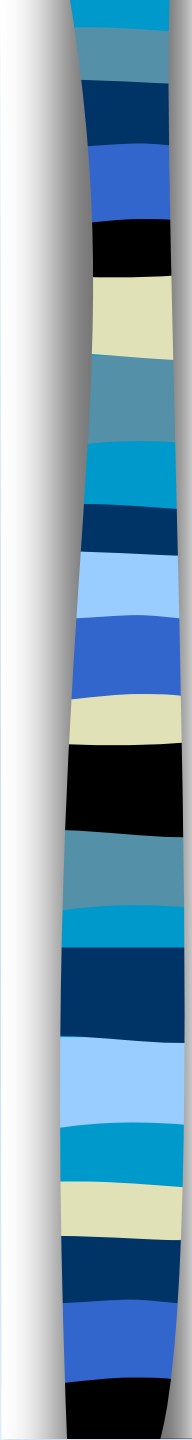
Esempio: La **TEORIA DEGLI INSIEMI** è strettamente connessa con molti settori della matematica



Una doverosa premessa.....

Affinché si possa parlare di **insieme** in senso matematico occorre poter stabilire senza ambiguità se un elemento appartiene o meno all'insieme

Perciò in matematica si considerano **insiemi** solo quei raggruppamenti di elementi per cui è possibile stabilire, secondo un criterio oggettivo, se un elemento appartiene o meno al raggruppamento

- 
- Ad esempio **è un insieme** matematicamente corretto l'insieme delle città della Campania.

Infatti tutti sanno riconoscere le differenti città della regione in questione

- Invece **non è un insieme** matematicamente corretto l'insieme dei ragazzi simpatici della classe.

Ciò perché la simpatia di un compagno o di un altro è soggettiva

Esempi classici di insiemi

Avete già incontrato in MATEMATICA alcuni **insiemi** ovvero dei raggruppamenti di elementi che hanno caratteristiche comuni

N ossia l'insieme dei numeri naturali

Z ossia l'insieme dei numeri interi

Q ossia l'insieme dei numeri razionali

R ossia l'insieme dei numeri reali

Tali insiemi si chiamano anche **insiemi numerici** poiché hanno per elementi dei numeri

Definizione: un insieme privo di elementi si chiama **INSIEME VUOTO** e si indica col simbolo $\emptyset$

Appartenenza ad un insieme

Se un oggetto **x** fa parte dell'insieme **A** si dice che “**x** è un **elemento** di **A**” o che

“**x** appartiene all'insieme **A**” e si scrive in simboli

$$x \in A$$

Se un oggetto **y** non fa parte dell'insieme **A** si dice che “**y non** è un **elemento** di **A**” o che

“**y non** appartiene all'insieme **A**” e si scrive in simboli

$$y \notin A$$

Il simbolo di appartenenza

Attenzione all'uso dei simboli

$\in$ *appartiene*

$\notin$ *non appartiene*

Essi esprimono sempre un legame tra un **elemento** ed un **insieme**, mai tra due insiemi (vale **l'inclusione**) o tra due elementi.

Il nome dell'elemento va scritto sempre a sinistra, quello dell'insieme a destra del simbolo stesso.

Il simbolo di appartenenza

Esempio: Consideriamo l'insieme **A** delle lettere dell'alfabeto che costituiscono la parola
"mela"

Le lettere **a**, **m** appartengono a tale insieme e si scrive in simboli:

$$\mathbf{a} \in \mathbf{A} \quad \mathbf{m} \in \mathbf{A},$$

Le lettere **b** e **c** non appartengono a tale insieme e si scrive

$$\mathbf{b} \notin \mathbf{A} \quad \mathbf{c} \notin \mathbf{A}$$

Esempi di appartenenza

Esempio 1: se l'insieme **A** è l'insieme dei capoluoghi di provincia della Campania allora

"Napoli" $\in$ **A**

mentre ovviamente

"Torino" $\notin$ **A**

Esempio 2: se l'insieme **B** è l'insieme dei numeri naturali che risultano pari allora

12 $\in$ **B**

mentre ovviamente

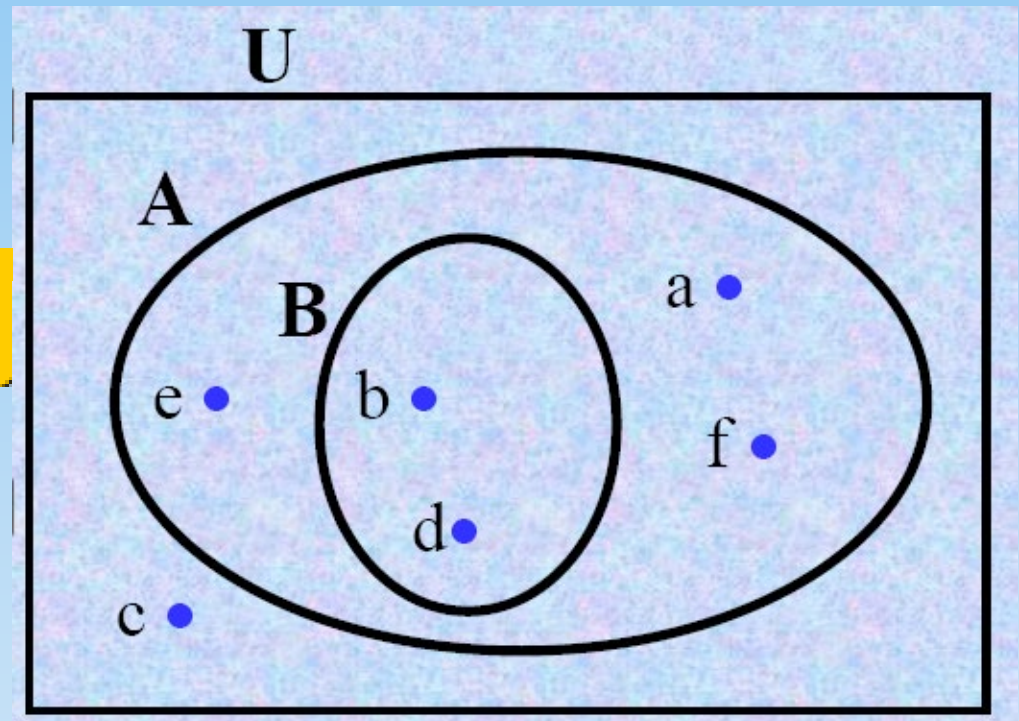
77 $\notin$ **B**

Esempi di appartenenza

$$U = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$A = \{a, b, d, e, f\}$$

$$B = \{b, d\}$$



$$a \in A, a \in U, a \notin B,$$

$$b \in B, b \in A, b \in U$$

$$c \in U, c \notin B, c \notin A$$

Insieme finito o infinito

Un insieme si dice **finito** se ha un numero finito di elementi

*Esempio: l'insieme **A** dei capoluoghi di provincia della Campania (“Napoli”, “Caserta”, “Avellino”, “Benevento” e “Salerno”) è un insieme **finito***

Un insieme si dice **infinito** se ha un numero infinito di elementi

*Esempio: l'insieme **B** dei numeri naturali che risultano pari è un insieme **infinito***

Si definisce **potenza** o **cardinalità** di un insieme il numero dei suoi elementi

Esempio:

*La **cardinalità** dell'insieme **A** dei capoluoghi di provincia della Campania è pari a 5*

*La **cardinalità** dell'insieme **B** dei numeri naturali che risultano pari è ∞*

Rappresentazione di un insieme

2) Graficamente con il diagramma di **EULERO-VENN**

Per rappresentare un qualsiasi insieme possiamo utilizzare tre diversi metodi.

Si voglia ad esempio rappresentare l'insieme che chiameremo **A** di tutte le vocali dell'alfabeto italiano:
a, e, i, o, u

1) Per **ELENCAZIONE**

3) Enunciando la **PROPRIETA'**
CARATTERISTICA

1) Per **ELENCAZIONE**

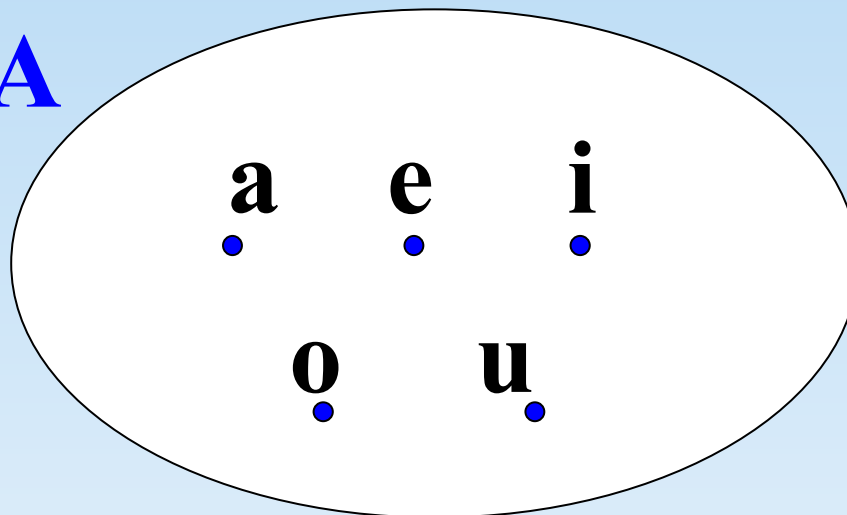


$A = \{a, e, i, o, u\}$

2) Diagramma di **EULERO-VENN**



A



3) Tramite **PROPRIETA'** **CARATTERISTICA**

$$\mathbf{A} = \{ \mathbf{x} \text{ tale che "x è una vocale" } \}$$

che può anche scriversi in modo equivalente

$$\mathbf{A} = \{ \mathbf{x} \mid \text{"x è una vocale"} \}$$

oppure sempre in modo equivalente

$$\mathbf{A} = \{ \mathbf{x} : \text{"x è una vocale"} \}$$

Sottoinsieme di in insieme

Siano **A** e **B** due insiemi qualsiasi.

Se ogni elemento dell'insieme **B** appartiene anche all'insieme **A** si dice che "**B** è *incluso* in **A**" o che "**B** è *sottoinsieme* di **A**" e si indica

$$\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$$

Se ogni elemento dell'insieme **A** appartiene all'insieme **B** si dice che "**A** è *incluso* in **B**" o che "**A** è *sottoinsieme* di **B**" e si indica :

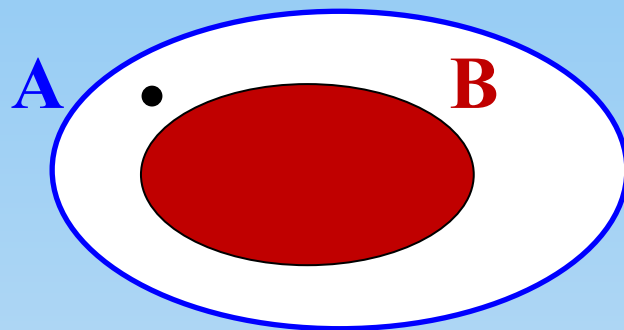
$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$$

Ovviamente quindi se

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \text{ e } \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} \overset{\text{equivale a}}{\longleftrightarrow} \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Sottoinsieme di in insieme

Se $B \subseteq A$ ma $A \not\subseteq B$
allora vuol dire che:



"esiste almeno un elemento dell'insieme A che non appartiene all'insieme B"

e pertanto si dice che

"l'insieme B è incluso o contenuto propriamente nell'insieme A"

ossia che

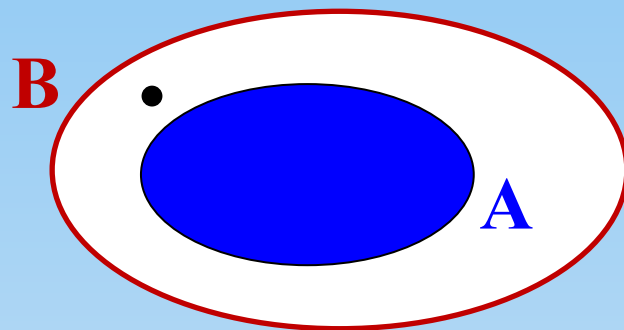
"l'insieme B è un sottoinsieme proprio dell'insieme A"

e si indica così:

$$B \subset A$$

Sottoinsieme di in insieme

Se $A \subseteq B$ ma $B \not\subseteq A$
allora vuol dire che:



*"esiste almeno un elemento dell'insieme **B** che non appartiene all'insieme **A**"*

e pertanto si dice che

*"l'insieme **A** è incluso o contenuto **propriamente** nell'insieme **B**"*

ossia che

*"l'insieme **A** è un sottoinsieme **proprio** dell'insieme **B**"*

e si indica così:

$$A \subset B$$

Sottoinsieme di in insieme

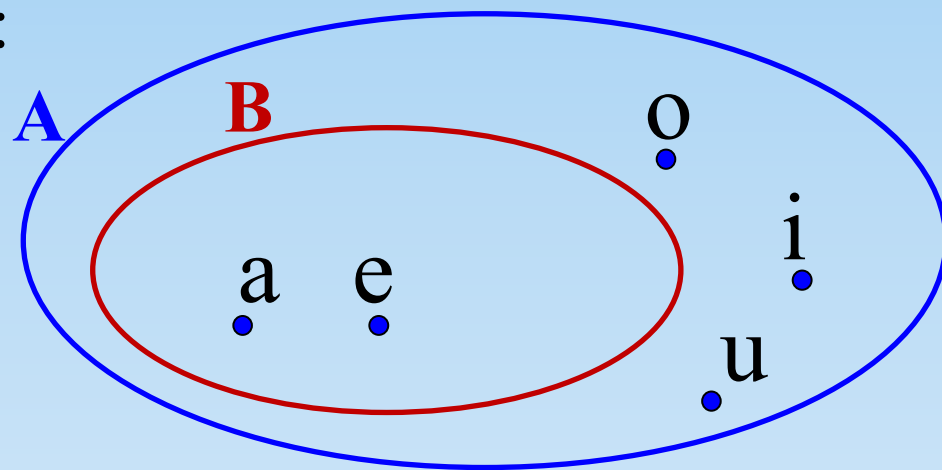
Siano

$$\mathbf{A} = \{ x \mid \text{"x è una vocale"} \}$$

$$\mathbf{B} = \{ x \mid \text{"x è una vocale della parola "cane""} \}$$

allora è evidente che:

$$\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} \text{ e } \mathbf{A} \not\subseteq \mathbf{B}$$



Esercizio: siano

$$\mathbf{A} = \{ x \mid \text{"x è un numero naturale pari da 1 a 10"} \}$$

$$\mathbf{B} = \{ x \mid \text{"x è un numero naturale da 1 a 10"} \}$$

In che posizione reciproca si trovano gli insiemi $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$?

Esempi

Ogni insieme è un
SOTTOINSIEME
(IMPROPRIO) di sé stesso

$$A \subseteq A, B \subseteq B, \dots$$

B è un SOTTOINSIEME
IMPROPRIO di B

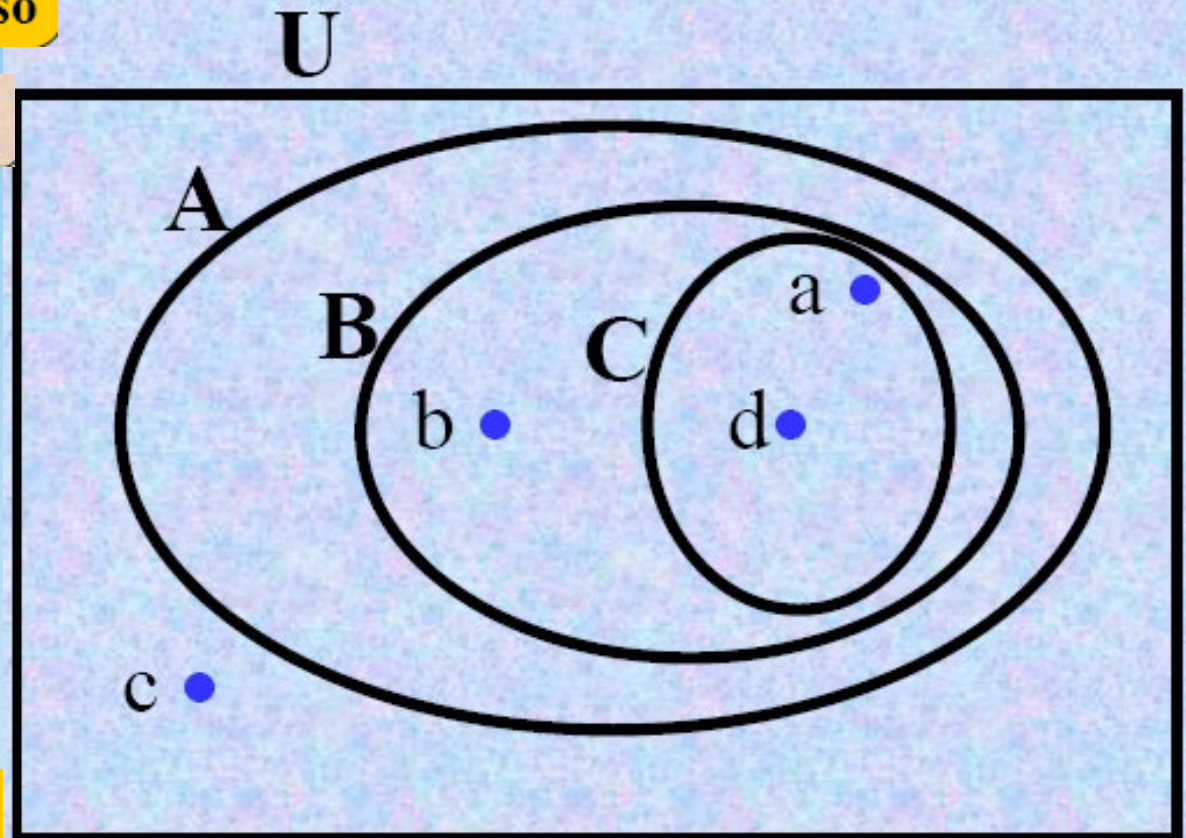
$$B \subseteq B$$

B è un SOTTOINSIEME
(IMPROPRIO) di A

$$B \subseteq A$$

L'insieme vuoto è un
SOTTOINSIEME
(IMPROPRIO) di ogni
insieme

$$\emptyset \subseteq C, \emptyset \subseteq B, \dots$$



C è un SOTTOINSIEME
DI B

$$C \subset B$$

A è un SOTTOINSIEME
DI U

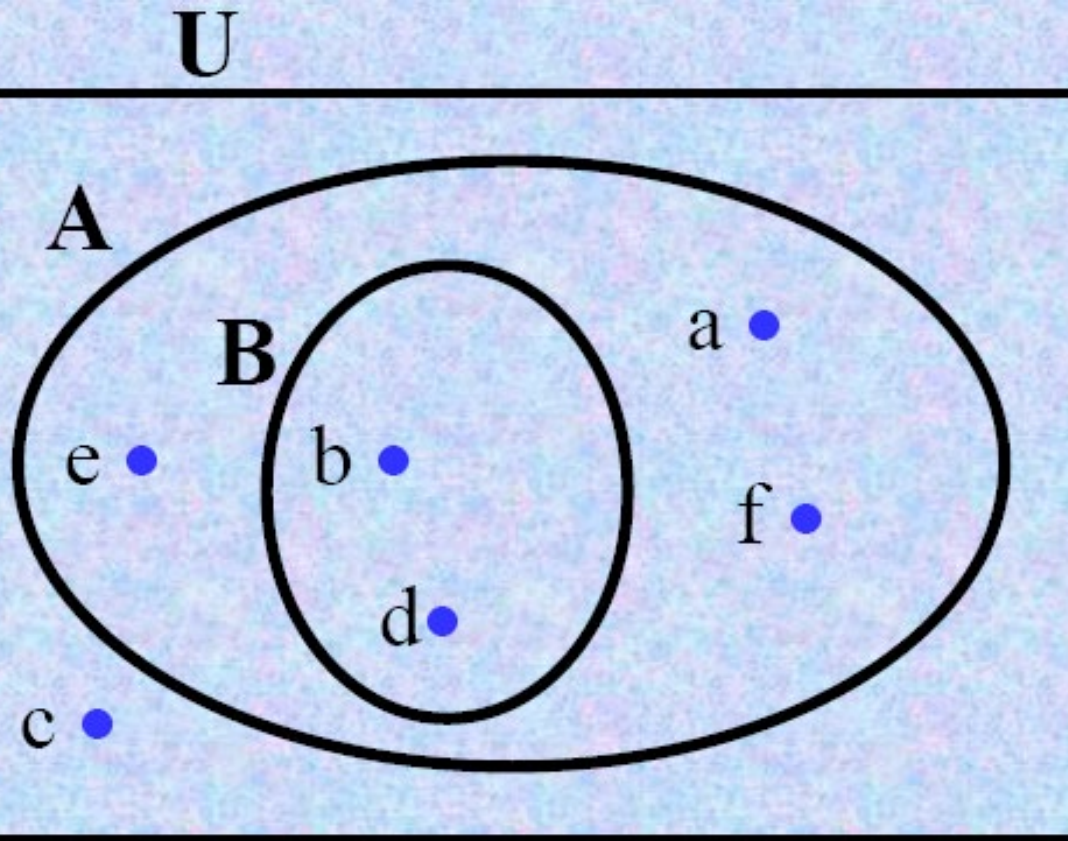
$$A \subset U$$

Esempi

$$U = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$A = \{a, b, d, e, f\}$$

$$B = \{b, d\}$$



$$\{b, d\} \subseteq B$$

$$\{a, b, d\} \subset A$$

$$\{d\} \subset B$$

OPERAZIONI TRA INSIEMI

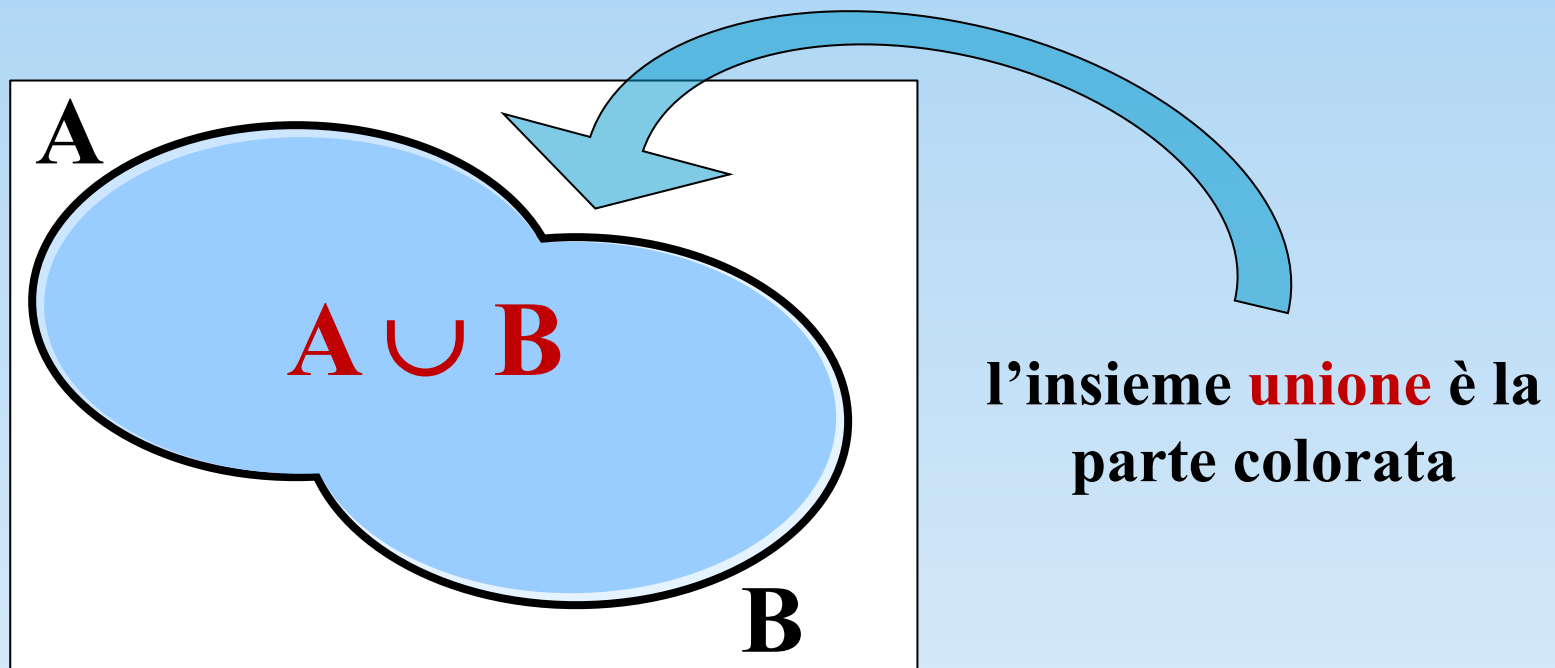
□ Unione $\cup$

□ Intersezione $\cap$

□ Differenza $-$

□ Prodotto Cartesiano $\times$

Si definisce **UNIONE** di due insiemi **A** e **B**,
l'insieme degli elementi che appartengono
ad A oppure a B
(ossia ad almeno uno dei due)



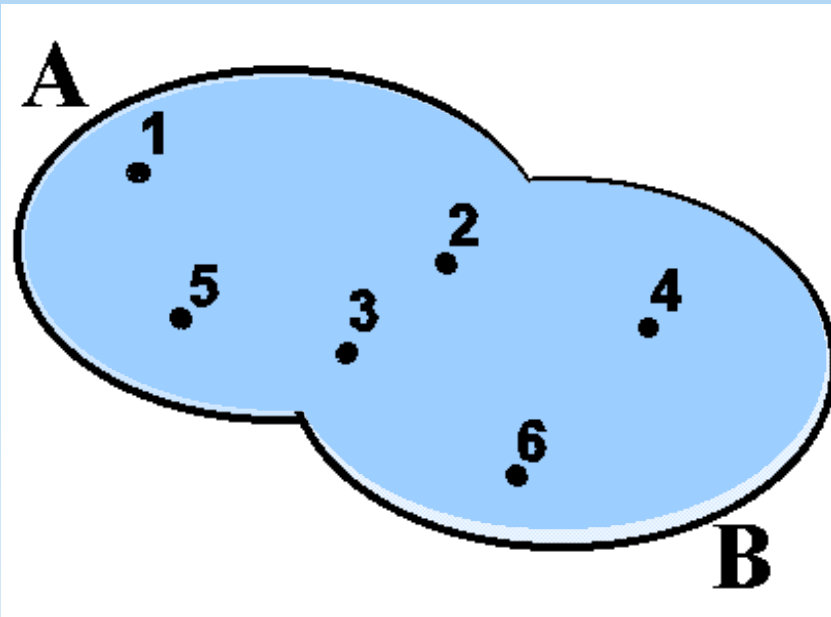
$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ o } x \in B \}$$

Dati ad esempio i due insiemi
 $A = \{1, 2, 3, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 6\}$,
l'unione tra A e B è data dal seguente
insieme (l'ordine degli elementi non è importante):

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Il simbolo $\cup$ è il simbolo che caratterizza
l'operazione. Si può leggere " A unito B "
oppure " A o B " oppure " A OR B "

Usando i diagrammi di **Eulero-Venn**
il risultato dell'operazione di unione
vista nell'esempio precedente sarà:



**N.B. Gli elementi
in comune (2 e 3)
vanno considerati
una volta sola**

L'operazione di **UNIONE** soddisfa la
proprietà commutativa, cioè:

$$A \cup B = B \cup A$$

Infatti ricordando che l'ordine gli elementi non è
importante abbiamo che....

Dati ad esempio i due insiemi di prima
 $A = \{1, 2, 3, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 6\}$
accade che:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 4, 6\}$$

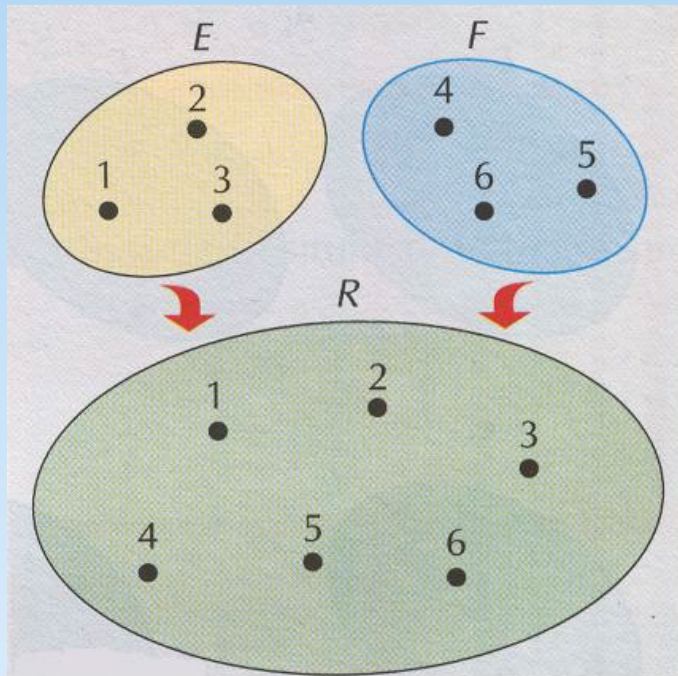
$$B \cup A = \{2, 3, 4, 6, 1, 5\}$$

Esempio di Unione.....

Siano **E** = {1, 2, 3} ed

F = {4, 5, 6}

Allora **R** = **E** $\cup$ **F** = {1, 2, 3, 4, 5, 6}



N.B. in questo caso gli insiemi **E** ed **F** si dicono **DISGIUNTI** (quando non hanno alcun elemento in comune)

CASI PARTICOLARI DELL'UNIONE

$$A \cup A = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

Se $B \subset A$ allora $A \cup B = A$

A

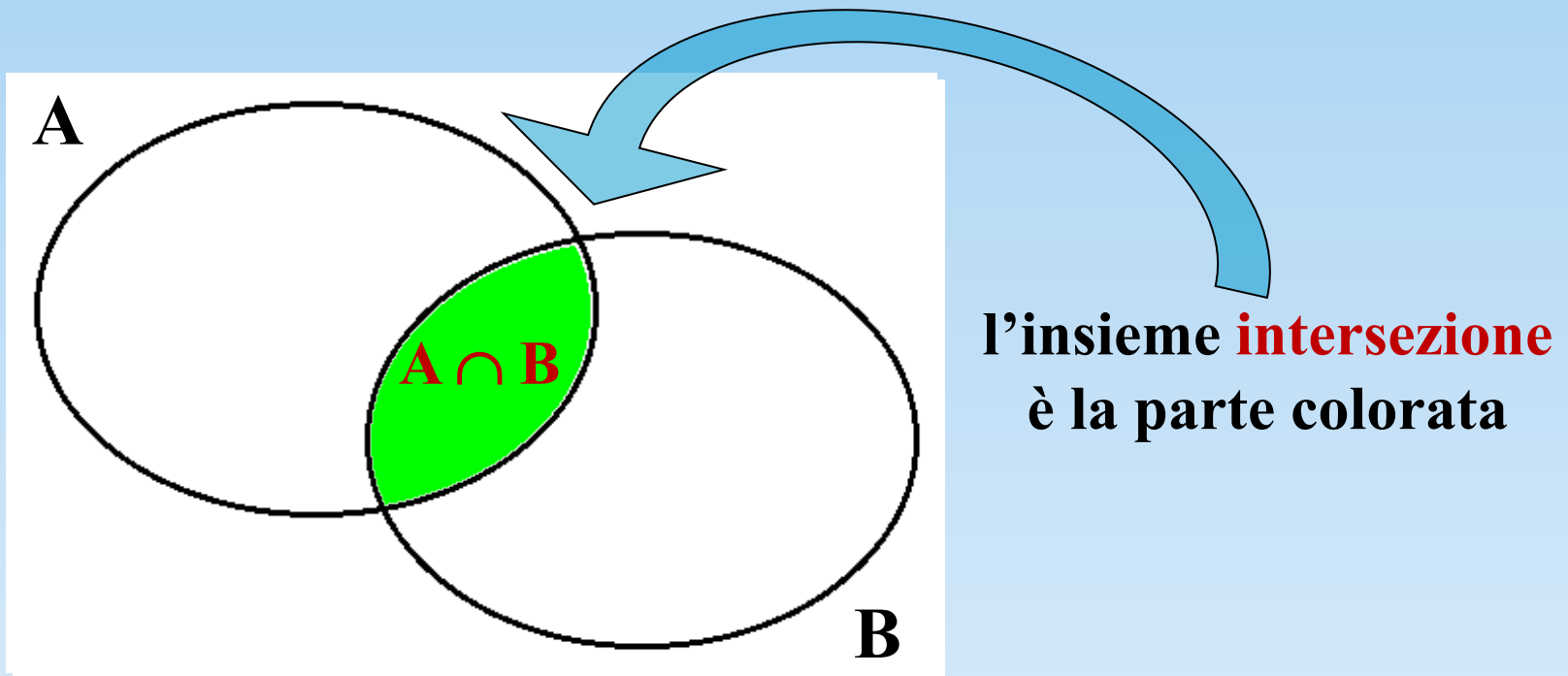
$$A \cup B$$

Se $A \subset B$ allora $A \cup B = B$

B

$$A \cup B$$

Si definisce **INTERSEZIONE** di due insiemi **A** e **B**, l'insieme formato dagli elementi comuni ad **A** e **B**.



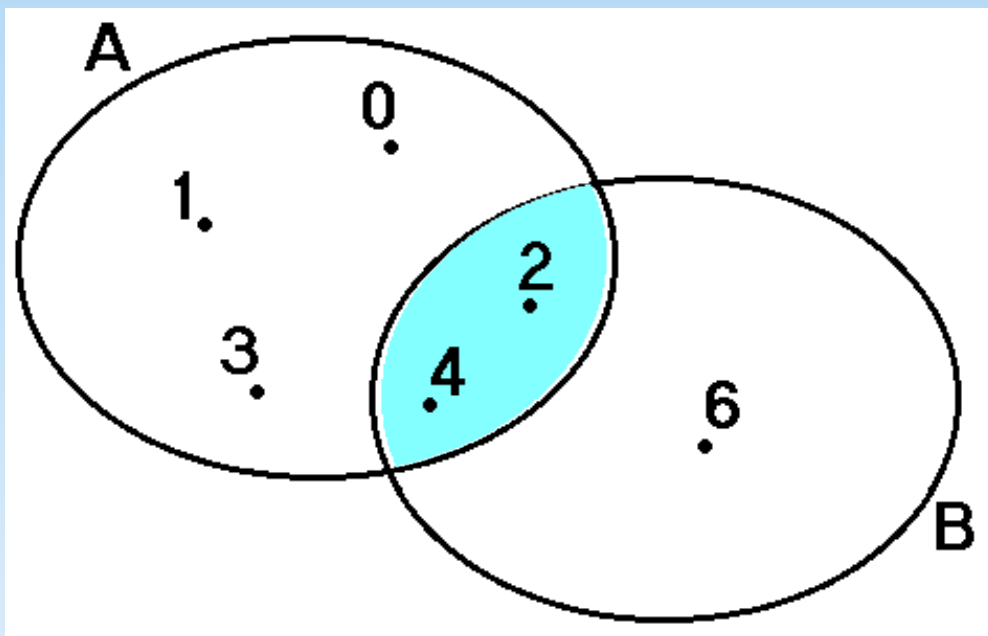
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Dati ad esempio i due insiemi
A = {0, 1, 2, 3, 4} e **B** = {4, 2, 6},
l'intersezione tra **A** e **B** è data dal
seguinte insieme:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{2, 4\}$$

Il simbolo $\cap$ è il simbolo che caratterizza
l'operazione. Si può leggere "**A** **intersecato**
B" oppure "**A** **e** **B**" oppure "**A** **AND** **B**"

Con i diagrammi di **Eulero-Venn** il risultato dell'esempio precedente sarà indicato così:



**N.B. in questo caso
gli insiemi E ed F
NON sono
DISGIUNTI (hanno
almeno un elemento
in comune)**

L'operazione di **INTERSEZIONE**
soddisfa la **proprietà commutativa**,
cioè:

$$A \cap B = B \cap A$$

Infatti ricordando che l'ordine gli elementi non è
importante abbiamo che....

Dati ad esempio i due insiemi di prima
 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{4, 2, 6\}$
accade che:

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

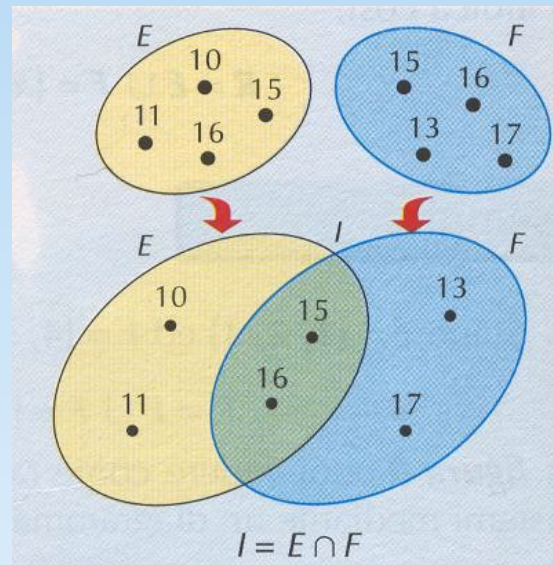
$$B \cap A = \{4, 2\}$$

Esempio di Intersezione

Siano **E**={10, 11, 15, 16},

F={13, 15, 16, 17}

allora **I** = **E** $\cap$ **F** = {15, 16}



CASI PARTICOLARI DELL'INTERSEZIONE

$$A \cap A = A$$

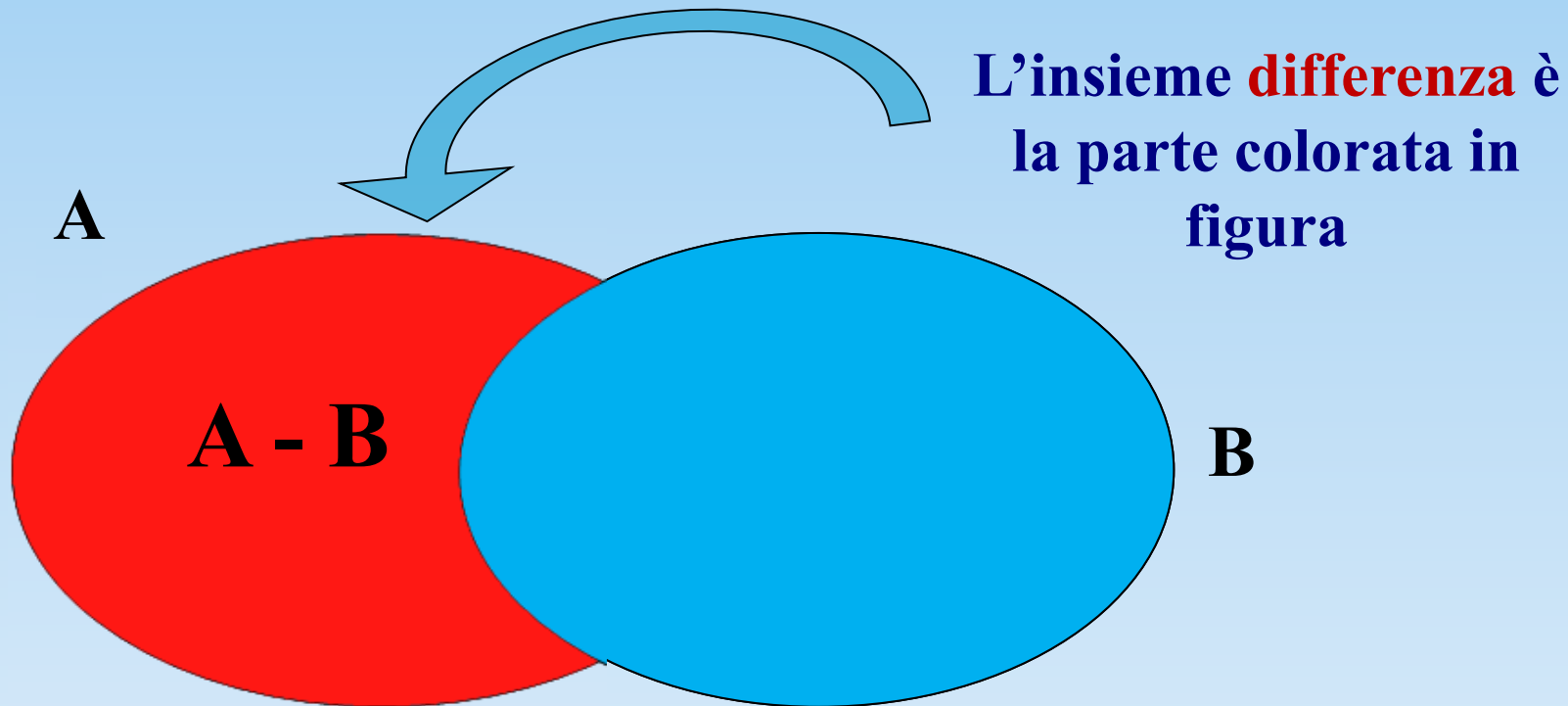
Se $A \cap B = \emptyset$,
A e B si dicono DISGIUNTI

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

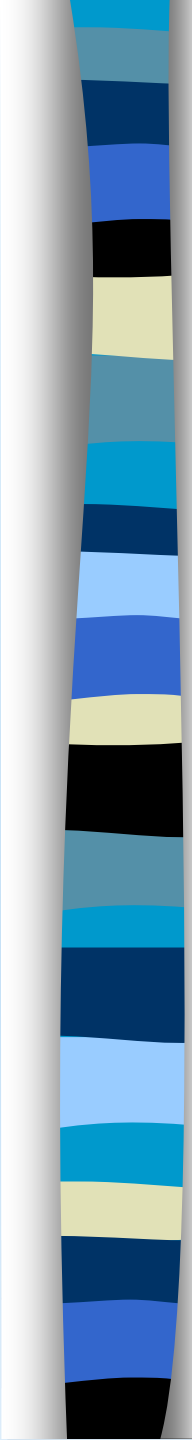
Se $B \subset A$ allora $A \cap B = B$

Se $A \subset B$ allora $A \cap B = A$

Si definisce **DIFFERENZA** fra due insiemi **A** e **B** l'insieme degli elementi di **A** che non appartengono ad **B**.



$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



L'operazione di **DIFFERENZA** non
soddisfa la **proprietà commutativa**,
cioè:

$$\mathbf{A - B \neq B - A}$$

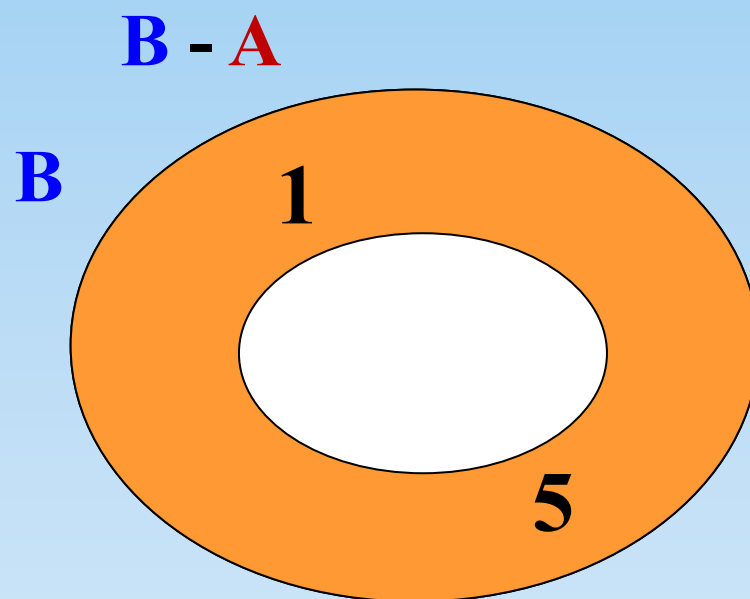
Infatti...

Dati ad esempio i due insiemi
 $B = \{1, 2, 3, 5\}$ e $A = \{2, 3\}$ accade che:

$$\mathbf{A - B = \{ \}}$$

$$\mathbf{B - A = \{1, 5\}}$$

Con i diagrammi di **Eulero-Venn**
l'esempio precedente diventa:

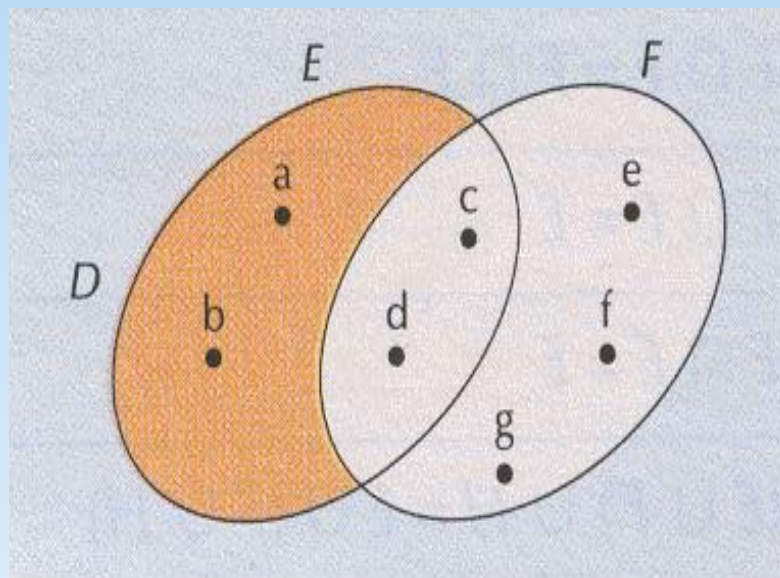


Esempio di Differenza.....

Siano **E**={a, b, c, d}

F={c, d, e, f, g},

Quindi **D** = **E** - **F** = {a, b}



Proprietà Unione, Intersezione e Differenza

Siano A, B e C tre insiemi.

Per le operazioni appena definite valgono le seguenti *proprietà*:

	Intersezione		Unione
Idempotenza	$A \cap A = A$	Idempotenza	$A \cup A = A$
Commutativa	$A \cap B = B \cap A$	Commutativa	$A \cup B = B \cup A$
Associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$	Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
$A - B \subseteq A$			
$(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$			
$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$			

Si definisce **PRODOTTO CARTESIANO** tra due insiemi **A** e **B** non vuoti (e non per forza distinti) l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il **1°** elemento appartiene ad **A** ed il **2°** elemento appartiene a **B**.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{A} \text{ e } \mathbf{y} \in \mathbf{B}\}$$

La **cardinalità** dell'insieme **A X B** è pari al prodotto della cardinalità dell'insieme **A** e della cardinalità dell'insieme **B**

Dati gli insiemi:

$$A = \{1, 3\} \quad \text{con Card}(A) = 2$$

$$B = \{a, b, c\} \quad \text{con Card}(B) = 3$$

allora

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$$

$$\text{con Card}(A \times B) = \text{Card}(A) * \text{Card}(B) = 2 * 3 = 6$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 3), (c, 1), (c, 3)\}$$

$$\text{con Card}(B \times A) = \text{Card}(B) * \text{Card}(A) = 3 * 2 = 6$$

Quindi ricordando che le coppie sono ordinate si ricava che:

$$A \times B \neq B \times A$$

Attenzione: quindi l'operazione
PRODOTTO CARTESIANO non
soddisfa la proprietà commutativa!

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

Infatti, nell'esempio precedente è:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{a}), (\mathbf{1}, \mathbf{b}), (\mathbf{1}, \mathbf{c}), (\mathbf{2}, \mathbf{a}), (\mathbf{2}, \mathbf{b}), (\mathbf{2}, \mathbf{c})\}$$

ma

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \{(\mathbf{a}, \mathbf{1}), (\mathbf{a}, \mathbf{2}), (\mathbf{b}, \mathbf{1}), (\mathbf{b}, \mathbf{2}), (\mathbf{c}, \mathbf{1}), (\mathbf{c}, \mathbf{2})\}$$

Proprietà del Prodotto Cartesiano

Per il prodotto cartesiano $A \times B$ valgono le seguenti *proprietà*:

distributiva rispetto all'unione

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

distributiva rispetto all'intersezione

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$\text{Se } C \subseteq A \text{ e } D \subseteq B \Rightarrow C \times D \subseteq A \times B$$

Particolarità del Prodotto Cartesiano

Se l'insieme $A = B$ allora il **prodotto cartesiano**

$$A \times A = A^2$$

sarà formato dalle coppie ordinate in cui sia il primo, sia il secondo elemento appartengono allo stesso insieme A

Caso notevole: se l'insieme $A = R$ (con R insieme dei numeri reali) allora il prodotto cartesiano

$$R \times R = R^2$$

sarà costituito dall'insieme formato da coppie ordinate di punti in cui sia il primo, sia il secondo elemento sono numeri reali qualsiasi.

Forse non lo sapete, ma avete sicuramente già incontrato la sua rappresentazione grafica

.... infatti il **piano** o **diagramma cartesiano** è la rappresentazione grafica del **prodotto cartesiano** $R \times R = R^2$ ed i suoi elementi altro non sono che i punti (x, y) , le famose **coordinate cartesiane**

Generalizzazione del *Prodotto Cartesiano*

Si definisce **prodotto cartesiano** di **n** insiemi **D₁**, **D₂**, **D₃**, ..., **D_n** **non vuoti** (e non per forza distinti) l'insieme formato da tutte le ennuple ordinate tali che il **1°** elemento appartiene a **D₁**, il **2°** elemento appartiene a **D₂**, il **3°** elemento appartiene a **D₃**, ..., l'**ennesimo** elemento appartiene a **D_n**.

$$D_1 \times D_2 \times D_3 \times \dots \times D_n =$$

$$\{(d_1, d_2, d_3, \dots, d_n) \mid d_1 \in D_1 \text{ e } d_2 \in D_2 \text{ e } d_3 \in D_3 \dots \text{ e } d_n \in D_n\}$$

Relazione (BINARIA) tra insiemi

Un **predicato** (enunciato semplice o composto) riferito a due argomenti viene chiamata **relazione binaria**.

Dati due insiemi **A** e **B** (non per forza distinti), si definisce **relazione binaria** $\mathcal{R}$ l'insieme formato dalle **coppie ordinate** di elementi **(x, y)** in cui il primo elemento appartiene al primo insieme assegnato **A** ed il secondo elemento al secondo insieme assegnato **B** che verificano il suo predicato (ossia lo rendono VERO)

Se ciò accade, si dirà che "**a** è in **relazione** $\mathcal{R}$ con **b**" oppure in simboli:

$$\mathbf{x} \mathcal{R} \mathbf{y} \text{ oppure } \mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbf{A} \text{ e } \mathbf{y} \in \mathbf{B}$$

Quindi appare evidente che le **coppie ordinate** che verificano la relazione assegnata $\mathcal{R}$ appartengono ad **un insieme** che, proprio per la sua natura, risulta essere un sottoinsieme (proprio o improprio) del prodotto cartesiano $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

$$\text{ossia} \\ \mathcal{R} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

Relazione tra insiemi: primo esempio

Esempio: Siano dati i **due** insiemi $A = \{2, 4, 7\}$ e $B = \{2, 5, 8\}$ e sia assegnata la relazione binaria $\mathcal{R} = \text{"essere minore di"}$ tra di essi, ossia

$$x \mathcal{R} y \overset{\text{se e solo se}}{\Leftrightarrow} x < y \text{ con } x \in A \text{ e } y \in B$$

Le coppie che verificano la relazione $\mathcal{R}$ formano l'insieme

$$\mathcal{R} = \{(2, 5), (2, 8), (4, 5), (4, 8), (7, 8)\} \subset A \times B$$

che risulta essere un **sottoinsieme** (in questo caso *proprio*) del **prodotto cartesiano** di A e B

Infatti

$$A \times B = \{(2, 2), (2, 5), (2, 8), (4, 2), (4, 5), (4, 8), (7, 2), (7, 5), (7, 8)\}$$

Quindi in questo caso

$$\mathcal{R} \subset A \times B$$

Elementi di $\mathcal{R}$

Relazione tra insiemi: primo esempio

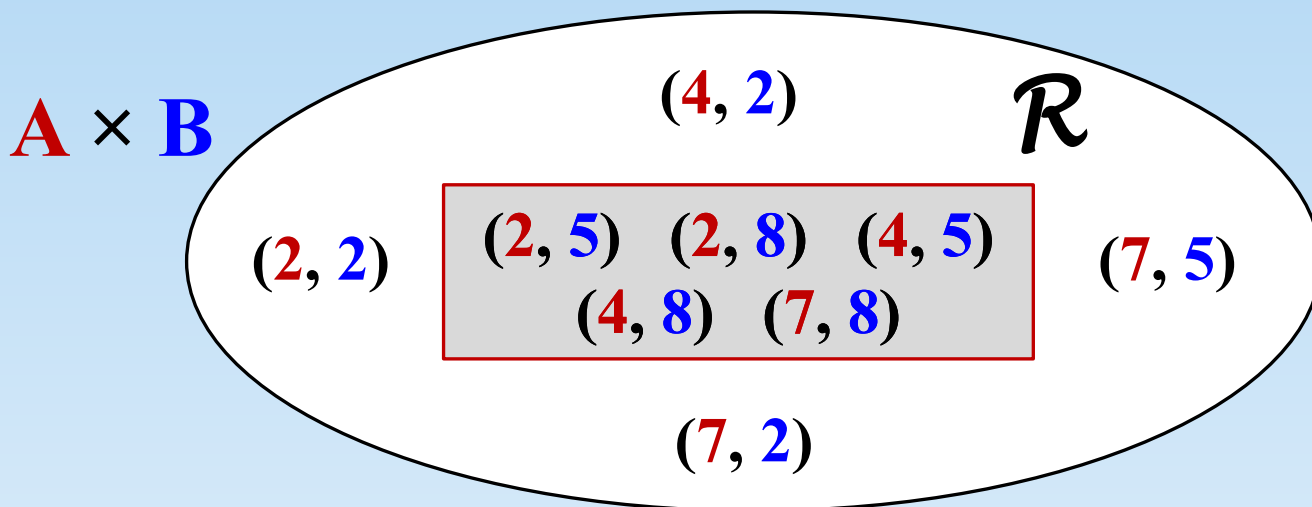
Esempio: Siano dati i due insiemi $A = \{2, 4, 7\}$ e $B = \{2, 5, 8\}$ e sia assegnata la relazione binaria $\mathcal{R} = \text{"essere minore di"}$ tra di essi, ossia

$$x \mathcal{R} y \stackrel{\text{se e solo se}}{\Leftrightarrow} x < y \text{ con } x \in A \text{ e } y \in B$$

Le coppie che verificano la relazione $\mathcal{R}$ formano l'insieme

$$\mathcal{R} = \{(2, 5), (2, 8), (4, 5), (4, 8), (7, 8)\} \subset A \times B$$

che risulta essere un **sottoinsieme** (in questo caso *proprio*) del **prodotto cartesiano** di A e B



Infatti $\mathcal{R} \subset A \times B$

Relazione tra insiemi: secondo esempio

Esempio: Siano sempre $A = \{2, 4, 7\}$ e $B = \{2, 5, 8\}$

e sia assegnata questa volta la relazione binaria

$\mathcal{R} =$ "essere numeri interi compresi tra 1 e 10", ossia

$x \mathcal{R} y \stackrel{\text{se e solo se}}{\Leftrightarrow} x \text{ e } y \text{ numeri interi tra 1 e 10 con } x \in A \text{ e } y \in B$

Le coppie che verificano la relazione $\mathcal{R}$ formano l'insieme

$$\mathcal{R} = \{(2, 2), (2, 5), (2, 8), (4, 2), (4, 5), (4, 8), (7, 2), (7, 5), (7, 8)\} \subseteq A \times B$$

che risulta essere un **sottoinsieme** (in questo caso *improprio*) del **prodotto cartesiano** di A e B

In questo caso tutte le coppie del prodotto cartesiano $A \times B$ **verificano la relazione** $\mathcal{R}$ e quindi....

.... in questo caso

$$\mathcal{R} = A \times B$$

Relazione tra insiemi: terzo esempio

Esempio: Siano sempre $A = \{2, 4, 7\}$ e $B = \{2, 5, 8\}$

e sia assegnata questa volta la relazione binaria

$\mathcal{R} = \text{"essere numeri interi negativi"}$, ossia

$$x \mathcal{R} y \stackrel{\text{se e solo se}}{\Leftrightarrow} x \text{ e } y \text{ numeri negativi con } x \in A \text{ e } y \in B$$

Evidentemente non esistono coppie ordinate che verificano la relazione $\mathcal{R}$ e quindi si può scrivere che:

$$\mathcal{R} = \emptyset \subseteq A \times B$$

che risulta essere un **sottoinsieme** (anche in questo caso *improprio*) del **prodotto cartesiano di A e B**

In questo caso **nessuna** coppia del prodotto cartesiano $A \times B$ **verifica la relazione $\mathcal{R}$** e quindi....

.... in questo caso

$$\mathcal{R} = \emptyset \subseteq A \times B$$

Relazione tra insiemi

Una relazione binaria $\mathcal{R}$ può godere delle seguenti *proprietà*:

riflessiva $\Leftrightarrow a \mathcal{R} a \quad \forall a \in A$ cioè se ogni elemento di A è in relazione $\mathcal{R}$ con se stesso

simmetrica $\Leftrightarrow a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a \quad \forall a, b \in A$

antisimmetrica $\Leftrightarrow a \mathcal{R} b \text{ e } b \mathcal{R} a \Rightarrow a = b$

cioè $\forall a, b \in A$ con $a \neq b \quad a \mathcal{R} b \Rightarrow b \text{ non } \mathcal{R} a$

Transitiva $\Leftrightarrow a \mathcal{R} b \text{ e } b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c \quad \forall a, b, c \in A$

Relazione (N-ARIA) tra insiemi

Un **predicato** (enunciato semplice o composto) riferito a n argomenti viene chiamata **relazione ennaria (o n-aria)**.

Dati **n** insiemi $D_1, D_2, \dots, D_n$ (non per forza distinti), si definisce **relazione ennaria** $\mathcal{R}$ l'insieme formato dalle **ennuple ordinate** di elementi $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ in cui il primo elemento appartiene al primo insieme assegnato D_1 , il secondo al secondo insieme assegnato $D_2, \dots$, l'ennesimo all'ennesimo insieme assegnato D_n **che verificano il suo predicato** (ossia lo rendono VERO).

In tal caso si dirà che vale

$\mathcal{R}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ con $d_1 \in D_1, d_2 \in D_2, \dots, d_n \in D_n$

ossia

$$\mathcal{R} \subseteq D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$$

Il **numero n** di elementi presenti nella ennupla (o ciò che è lo stesso **il numero n degli insiemi** del prodotto cartesiano cui la ennupla appartiene) viene detto **GRADO della relazione**.

Il **numero m** delle ennuple che appartengono all'insieme $\mathcal{R}$ è la **CARDINALITA' della relazione**.

Relazione: la forma tabellare

Poiché la relazione $\mathcal{R}$ è un insieme, sarà ovviamente possibile rappresentarla utilizzando una delle tre modalità già descritte ed utilizzate nelle slide precedenti (per elencazione, tramite diagramma di Eulero-Venn e tramite proprietà caratteristica)

SOLO per le **relazioni** è possibile utilizzare una importantissima **quarta possibile rappresentazione: la forma tabellare**

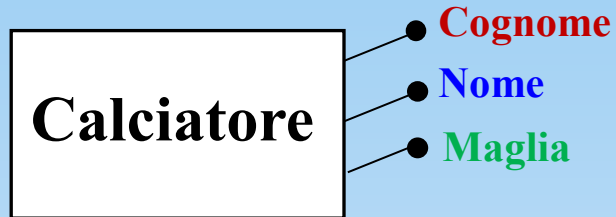
n (**GRADO** di $\mathcal{R}$)

D_1	D_2		D_n
.....			
.....			
d_1	d_2		d_n
.....			

m (**CARDINALITA'** di $\mathcal{R}$)

Relazione tra insiemi (Informatica)

Esempio (informaticamente molto significativo): **Diagramma ER**



Consideriamo l'entità "Calciatore (in attività della Serie A) ed i suoi attributi (insiemi di valori)

$D_1 = \text{Cognome}$

$D_2 = \text{Nome}$

$D_3 = \text{Maglia}$

Più precisamente gli **attributi** (o **domini**) conterranno:

Cognome = {tutti i **cognomi** dei giocatori della **serie A**}

Nome = {tutti i **nomi** dei giocatori della **serie A**}

Maglia = {tutti i **numeri di maglia** dei giocatori della **serie A**}

Consideriamo ora il seguente prodotto cartesiano:

Cognome x **Nome** x **Maglia**

che conterrà tutte le **ennuple** (in questo caso **terne**) composte, a partire dagli insiemi specificati, con le regole viste nelle slide precedenti

Relazione tra insiemi (Informatica)

Cognome x **Nome** x **Maglia** =

{ , ,
 ("Politano", "Matteo", 21), ("Politano", "Matteo", 1),
 , ,
 ("Meret", "Alex", 1), ("Meret", "Alex", 21),
 , ,
 ("Politano", "Alex", 21), ("Meret", "Matteo", 1),
 , ,
 ("Politano", "Alex", 1), ("Meret", "Matteo", 21),
 }

A questo punto ne deriva che **Calciatore** può essere considerata come la relazione (di grado 3)

$\mathcal{R}$ = "Essere un calciatore della Serie A nel campionato corrente"
per la quale vale la seguente inclusione stretta (*sottoinsieme proprio*)

Calciatore $\subset$ **Cognome** x **Nome** x **Maglia**

in quanto nel prodotto cartesiano indicato ci sono moltissime ennuple che, ovviamente, non verificano la relazione assegnata in quanto non corrispondono a nessun calciatore/maglia "reale"

Relazione tra insiemi (Informatica)

Utilizzando **la forma tabellare** per la relazione

Calciatore = "Essere un calciatore della Serie A nel campionato corrente"
avremo

Relazione Calciatore

m (CARDINALITA')

Pari al numero di tutti i calciatori
attualmente presenti nelle rose di
tutte le squadre di serie A

n (GRADO) = 3

(pari al numero di colonne)

Cognome	Nome	Maglia
Politano	Matteo	21
Meret	Alex	1
Osimhen	Victor	9
.....		

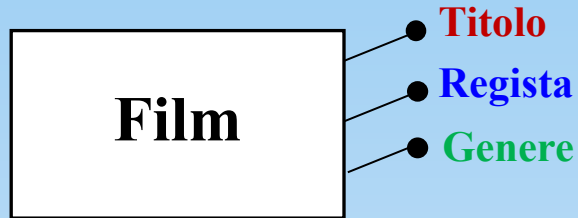
Schema della Relazione Calciatore

Calciatore (**Cognome** : Stringa(20), **Nome** : Stringa(20), **Maglia** : Intero)

Calciatore (**Cognome**, **Nome**, **Maglia**) in forma sintetica

Relazione tra insiemi (Informatica)

Esempio (informaticamente molto significativo): **Diagramma ER**



Consideriamo l'entità "Film"
(vincitore di almeno un Oscar) ed i
suoi attributi (insiemi di valori)

$D_1 = \text{Titolo}$

$D_2 = \text{Regista}$

$D_3 = \text{Genere}$

Più precisamente gli **attributi** (o **domini**) conterranno:

Titolo = {"Alien", "Per un pugno di dollari"}

Regista = {"Ridley Scott", "Sergio Leone"}

Genere = {"Fantascienza", "Western"}

Consideriamo ora il seguente prodotto cartesiano:

Titolo x **Regista** x **Genere**

che conterrà tutte le **ennuple** (**terne**) composte, a partire dagli insiemi specificati, con le regole viste nelle slide precedenti

Relazione tra insiemi (Informatica)

Titolo × **Regista** × **Genere** =

{ ("Alien", "Ridley Scott", "Fantascienza"),
("Alien", "Sergio Leone", "Fantascienza"),
("Alien", "Ridley Scott", "Western"),
("Alien", "Sergio Leone", "Western"),
("Per un pugno di dollari", "Ridley Scott", "Fantascienza"),
("Per un pugno di dollari", "Sergio Leone", "Fantascienza"),
("Per un pugno di dollari", "Ridley Scott", "Western"),
("Per un pugno di dollari", "Sergio Leone", "Western") }

A questo punto ne deriva che **Film** può essere considerata come la relazione (di grado 3)

$\mathcal{R} = \text{"Essere un film (da Oscar)"}$

per la quale vale la seguente inclusione stretta (sottoinsieme proprio)

Film $\subset$ **Titolo** × **Regista** × **Genere**

in quanto nel prodotto cartesiano ci sono moltissime ennuple che, ovviamente, non verificano la relazione assegnata

Relazione tra insiemi (Informatica)

Utilizzando **la forma tabellare** per la relazione
Film = "*Essere un Film da Oscar*" avremo

Relazione Film

n (GRADO) = 3

m
(**CARDINALITA'**)
= 2

Titolo	Regista	Genere
"Alien"	"Ridley Scott"	"Fantascienza"
"Per un pugno di dollari"	"Sergio Leone"	"Western"

Schema della Relazione **Film**

Film (**Titolo**: Stringa(50), **Regista**: Stringa(40), **Genere**: Stringa(25))

Film (**Titolo**, **Regista**, **Genere**) in forma sintetica