ESERCIZI SU ALGEBRA DI BOOLE

a) Calcolare il valore dei seguenti enunciati booleani composti costruendo le opportune tavole di verità

a1)	**p AND q**	**q AND p**
a2)	**p OR q**	**q OR p**
a3)	**(p AND q) AND r**	**p AND (q AND r)**
a4)	**(p OR q) OR r**	**p OR (q OR r)**
a5)	**p OR (q AND r)**	**(p OR q) AND (p OR r)**
a6)	**p AND (q OR r)**	**(p AND q) OR (p AND r)**
a7)	**NOT (p AND q)**	**(NOT p) OR (NOT q)**
a8)	**NOT (p OR q)**	**(NOT p) AND (NOT q)**
a9)	**p AND (NOT p)**	
a10)	**NOT (NOT p)**	

b) Provare se le seguenti coppie di enunciati booleani composti sono equivalenti o meno

b1) **p XOR q** $\overset{?}{\equiv}$ **(p AND (NOTq)) OR ((NOTp) AND q)**

b2) **(p AND q) OR (NOT p)** $\overset{?}{\equiv}$ **(NOT p) OR q**

b3) **NOT (p NOR q)** $\overset{?}{\equiv}$ **p OR q**

b4) **p AND q** $\overset{?}{\equiv}$ **NOT(p NAND q)**

b5) **(p OR q) AND (NOT p)** $\overset{?}{\equiv}$ **(NOT p) AND q**

b6) **(NOT p) XOR (NOT q)** $\overset{?}{\equiv}$ **(NOT p AND q) OR (p AND (NOT q))**

c) Dopo avere costruito la relativa tavola di verità, calcolare il valore di verità dei seguenti enunciati composti utilizzando gli enunciati semplici sottoindicati valutati secondo i valori assegnati

c1) p AND q con p : (a > 5) q: (b ≠ -2)
con a = 5 e b = 2

c2) NOT ((NOT p) OR q) con p : (a ≤ 3) q: (b = 4)
con a = 3 e b = -4

c3) (p NAND (NOT q)) XOR r con p : (a < 7) q: (b ≥ 2) r: (c ≠ -4)
con a = 7 e b = 3 e c = -4

c4) NOT (p AND q) OR (NOT p) con p : (x ≤ 3) q: (y ≠ 4)
con x = 3 e y = 4

c5) NOT (p OR q) AND p con p : (x > 3) q: (y = 4)
con x = -3 e y = -4

c6) (p NAND (NOT q)) XOR (NOT r) con p : (x ≤ 3) q: (y ≠ 4) r: (z > 2)
con x = 0 e y = 8 e z = -1

c7) NOT(p NOR (NOT r)) AND ((NOT q) OR p)
con p : (a = 7) q: (b < 1) r: (c ≥ -6)
con a = 7 e b = 3 e c = -5

c8) (NOT p) XNOR NOT (q NAND (NOT r))
con p : (a ≤ 2) q: (b ≥ 0) r: (c ≠-3)
con a = -1 e b = 0 e c = -3

d) Utilizzando tutte le proprietà illustrate a lezione (comprese le leggi di DE MORGAN) semplificare, ove possibile, i seguenti enunciati composti

d1) NOT ((NOT p) OR q) con p : (a ≤ 3) q: (b = 4)

d2) NOT (p AND (NOT q)) con p : (a > 5) q: (b ≠ 8)

d3) NOT (NOT(p AND q) OR r) con p : (a < 2) q: (b ≥ -4) r: (c ≠ 3)

d4) NOT ((NOT p) OR q OR (NOT r)) AND NOT (p NAND q)
con p : (a > -3) q: (b ≤ 7) r: (c ≠ 4)

d5) NOT (p AND (NOT q) AND r) OR NOT (p NOR q)
con p : (a ≤ 5) q: (b > 11) r: (c ≤ 2)

Suggerimenti per lo SVOLGIMENTO

Negli esercizi della tipologia a) , b) e c) per costruire una tabella di verità si deve seguire il seguente procedimento:

1) Individuare tutti gli enunciati semplici distinti presenti nell'enunciato composto (o forma enunciativa) assegnato;
*(nota bene: gli enunciati semplici presenti in un generico enunciato composto sono indicati, in genere, da una lettera minuscola partendo dalla **p** e continuando rispettando la classica sequenza alfabetica (quindi verrà usata poi la **q**, poi la **r**, poi la **s** e così via);*

2) La tabella di verità che dovrà essere disegnata deve avere una colonna per ciascun enunciato semplice presente nell'enunciato composto assegnato;

3) La tabella di verità che dovrà essere disegnata deve avere tante righe quante espresse dal calcolo della seguente potenza

$$2^n$$

dove:

- **la base 2 sta ad indicare il numero di valori di verità possibili che possono essere assunti da ciascun enunciato semplice presente nell'enunciato composto (VERO o FALSO);**
- **l'esponente n sta ad indicare il numero di enunciati semplici distinti presenti nell'enunciato composto assegnato.**

(Esempio: se nell'enunciato composto del quale devo dicegnare la tavola di verità:
- *è presente un solo enunciato semplice (**p**) allora la tabella avrà 2^1 ossia **2 righe**;*
- *sono presenti due soli enunciati semplici (**p** e **q**) allora la tabella avrà 2^2 ossia **4 righe**;*
- *sono presenti tre soli enunciati semplici (**p**, **q** ed **r**) allora la tabella avrà 2^3 **ossia 8 righe;***
- *etc. etc.)*

4) Per inserire agevolmente nelle colonne della tabella di verità relative agli enunciati semplici individuati nell'enunciato composto, TUTTE le combinazioni di valori di verità possibili occorre seguire il seguente procedimento:

- partendo dalla colonna più a destra disegnata (ossia quella che alfabeticamente viene per ultima) inserire in modo alternato V, F, V, F, …….

- continuare con la colonne più a sinistra inserire in modo alternato V, V, F, F, …….

- continuare con la colonne più a sinistra inserire in modo alternato V, V, V, V, F, F, F, F, …….

*Esempio: se nell'enunciato composto è presente un solo enunciato semplice **p***

p	
V	Resto della tabella
F	

*Esempio: se nell'enunciato composto sono presenti due soli enunciati semplici **p** e **q***

p	q	
V	V	
V	F	Resto della tabella
F	V	
F	F	

*Esempio: se nell'enunciato composto sono presenti tre soli enunciati semplici **p ,q** ed **r***

p	q	r
V	**V**	**V**
V	**V**	**F**
V	**F**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**
F	**F**	**F**

Resto della tabella

E così via……

5) Inserire nella tabella di verità una colonna per ogni sottoenunciato "risolvibile" individuato all'interno dell'enunciato composto assegnato, rispettando la presenza di eventuali parentesi tonde;
(nota bene: tale sottoenunciato deve essere risolto utilizzando, alle colonne opportune, una qualsiasi delle tavole di verità relative ai connettivi logici fondamentali (AND, OR e NOT) o ai connettivi logici derivati (XOR, XNOR, NAND e NOR) dell'Algebra di Boole studiati a lezione.
L'ultima colonna conterrà il risultato del'operazione.

<u>Esempio svolto:</u>

*Supponiamo di voler conoscere costruire **la tavola verità** del seguente enunciato composto (o forma enunciativa)*

NOT(p AND (NOT q))

Come appena illustrato costruiamo la tavola di verità seguendo i seguenti passi:

***1)** individuiamo gli enunciati semplici contenuti nella forma enunciativa.*
*Nel nostro caso sono 2 esattamente **p** e **q**;*

***2)** disegniamo una colonna per ciascun enunciato semplice presente*

p	q

3)** disegniamo tante righe quanto il valore di* 2^2 *ossia **4

p	q

4) *valorizziamo opportunamente tali colonne così come suggerito in precedenza:*

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

5) *Inserire nella tabella di verità una colonna per ogni sottoenunciato "risolvibile" individuato all'interno dell'enunciato composto assegnato, rispettando la presenza di eventuali parentesi tonde (Nel nostro caso* ***NOT q*** *,* ***p AND (NOT q)*** *e* ***NOT (p AND (NOT q))***

p	*q*	*NOT q*	*p AND (NOT q)*	*NOT(p AND (NOT q))*
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Negli esercizi della tipologia b) per dimostrare alla fine se i due enunciati composti assegnati sono o non sono LOGICAMENTE EQUIVALENTI, dopo aver costruito le due rispettive tavole di verità,occorre confrontare l'ultima colonna della prima tavola di verità con l'ultima colonna della seconda tavola di verità (ossia le colonne contenenti i rispettivi risultati)
Avremo allora i seguenti due possibili casi:
- tali due colonne COINCIDONO (ossia contengono la medesima sequenza di valori di verità): in questo caso si dice che "i due enunciati composti assegnati risultano LOGICAMENTE EQUIVALENTI perché hanno la stessa tavola di verità";
- tali due colonne NON COINCIDONO (ossia NON contengono la medesima sequenza di valori di verità): in questo caso si dice che "i due enunciati composti assegnati NON risultano LOGICAMENTE EQUIVALENTI perché NON hanno la stessa tavola di verità";

<u>Esempio svolto:</u>

Proviamo che i due enunciati composti (o forme enunciative)

(p AND q) OR (NOT p) *e* ***(NOT p) OR q***

sono LOGICAMENTE EQUIVALENTI.
Dobbiamo innanzitutto costruire le due tavole di verità con seguendo i passi prima specificati per poi confrontare i valori di verità contenuti nelle rispettive due ultime colonne.

Tavola di verità di: ***(p AND q) OR (NOT p)***

p	*q*	*p AND q*	*NOT p*	*(p AND q) OR (NOT p)*
V	**V**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**V**

Tavola di verità di: ***(NOT p) OR q***

p	*q*	*NOT p*	*(NOT p) OR q*
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**

Poichè i due enunciati composti hanno la stessa tavola di verità essi risultano essere LOGICAMENTE equivalenti.

Quindi possiamo scrivere che ***(p AND q) OR (NOT p)*** $\equiv$ ***(NOT p) OR q***

Negli esercizi della tipologia c), dopo aver costruito la tavola di verità relativa all'enunciato composto assegnato, occorre sostituire per ciascun enunciato semplice i valori proposti in modo da poter:
- calcolare il valore di verità di ciascun enunciato semplice partecipante;
- individuare, all'interno della tavola di verità, la riga corretta relativa alla combinazione di valori di verità individuati per tutti gli enunciati semplici partecipanti;
- comunicare il risultato finale ottenuto leggendolo dall'ultima colonna.

Esempio svolto:

Dopo avere costruito la relativa tavola di verità, calcolare il valore di verità del seguente enunciato composto

NOT(p AND (NOT q))

utilizzando gli enunciati semplici sottoindicati valutati secondo i seguenti valori assegnati:

con p : (a < -7) q: (b ≠ -4)
con a = -5 e b = -2

1) *Per prima cosa calcoliamo il valore di verità di ciascun enunciato semplice utilizzando i valori assegnati:*

con p : (a < -7) ossia (-5 < -7) FALSO (F) quindi p FALSO
con q: (b ≠ -4) ossia (-2 ≠ -4) VERO (V) quindi q VERO

2) *Ora costruiamo la tavola di verita dell'enunciato composto assegnato:*

p	***q***	***NOT q***	***p AND (NOT q)***	***NOT(p AND (NOT q))***
V	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**V**

3) *Individuiamo la riga della tavola di verità corrispondente alla combinazione individuato al punto 1 e mettiamo in evidenza la risposta da dare*

p	***q***	***NOT q***	***p AND (NOT q)***	***NOT(p AND (NOT q))***
V	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**V**

4) *Diamo la risposta:* ***nelle ipotesi fornite dal'esercizio assegnato l'enunciato composto assume valore di verità VERO (V)***

Negli esercizi di tipologia d) che prevedono l'utilizzo di tutte le proprietà illustrate a lezione (comprese le leggi di DE MORGAN) per semplificare un enunciato composto assegnato occorre operare come segue:

Esempio svolto: *semplificare il seguente enunciato composto*

NOT ((NOT p) OR q) con **p : (a ≤ 3)** **q: (b = 4)** ossia **in teoria avremmo NOT ((NOT (a ≤ 3)) OR (b = 4))**

Invece svolgendo quanto richiesto abbiamo:

Legge di DE MORGAN — *Legge della doppia negazione* — *Sostituzione enunciati assegnati* — *Applicazione di principio algebrico*

NOT ((NOT p) OR q) ≡ NOT(NOT p) AND (NOT q) ≡ p AND (NOT q) ≡ (a ≤ 3) AND (NOT (b = 4)) ≡ (a ≤ 3) AND (b ≠ 4)

Quindi abbiamo dimostrato che

NOT ((NOT (a ≤ 3)) OR (b = 4)) ≡ (a ≤ 3) AND (b ≠ 4)

Appare del tutto evidente la semplificazione ottenuta!